Серия 6. Отношение отрезков. Теорема Фалеса.

Теорема Фалеса. На одной прямой отмечены точки A_1, B_1, C_1, на другой — A_2, B_2, C_2. Тогда если $A_1A_2 \parallel B_1B_2 \parallel C_1C_2$, то $\overline{A_1B_1}/\overline{B_1C_1} = \overline{A_2B_2}/\overline{B_2C_2}$.

1. Изначально жук сидит
(a) на стороне AB выпуклого четырёхугольника $ABCD$. Он четыре раза последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно диагоналям AC, BD, AC, BD.
(b) на стороне AB треугольника ABC. Он шесть раз последовательно переполз на соседнюю сторону, двигаясь параллельно сторонам CA, AB, BC, CA, AB, BC.
Докажите, что жук вернулся в исходную точку.

2. *Свойство биссектрисы.* Пусть AD — **(a)** внутренняя; **(b)** внешняя биссектриса неравнобедренного треугольника ABC. Докажите, что $BD/DC = AB/AC$.

3. На плоскости нарисованы две прямые. На этих прямых отмечено по три точки: на первой — A, B, C, на второй — A', B', C'. Известно, что $AB' \parallel A'B$ и $AC' \parallel A'C$. Докажите, что $BC' \parallel B'C$.

4. Прямая ℓ пересекает стороны AB, AD и диагональ AC параллелограмма $ABCD$ в точках X, Y, Z соответственно. Докажите, что $\dfrac{AB}{AX} + \dfrac{AD}{AY} = \dfrac{AC}{AZ}$.

5. В треугольнике ABC проведены медианы BB_1 и CC_1 и на стороне BC отмечена точка X. На сторонах AB, AC отмечены точки M и N соответственно так, что $MX \parallel CC_1$, $NX \parallel BB_1$. Докажите, что отрезок MN медианами BB_1 и CC_1 разбивается на три равные части.

6. В четырёхугольнике $ABCD$ углы при вершинах A и C — прямые. Из вершин B и D опущены перпендикуляры BX и DY на диагональ AC. Докажите, что $AX = CY$.

7. В неравнобедренном треугольнике ABC через точку, делящую ломаную BAC пополам, провели прямую ℓ_A, параллельную биссектрисе угла BAC. Аналогично определены прямые ℓ_B и ℓ_C. Докажите, что ℓ_A, ℓ_B, ℓ_C пересекаются в одной точке.

8. Пусть I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC ($\angle A = 60^\circ$). На отрезке AB отмечена точка P, что $PA = PI$. На отрезке BC нашлась такая точка M, что $2\angle BPM = \angle ABC$. Найдите BM/MC.