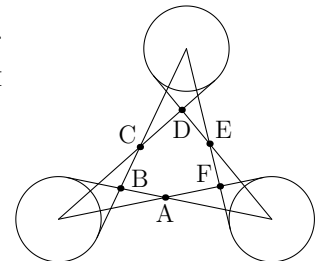


Серия 5. Отрезки касательных.

1. Пусть M — середина стороны BC треугольника ABC . (а) Докажите, что M равноудалена от точек касания вписанной и невписанной окружностей с отрезком BC . (б) Докажите, что M равноудалена от точек касания невписанных окружностей с продолжениями стороны BC .
2. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Пусть ω_D и ω_B — окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC . (а) Докажите, что если ω_D и ω_B касаются, то в $ABCD$ можно вписать окружность. (б) Докажите, что если $ABCD$ — описанный четырёхугольник, то ω_D и ω_B касаются.
3. Дан параллелограмм $ABCD$. Невписанная окружность треугольника ABD касается продолжений сторон AB и AD в точках M и N . Вписанная окружность треугольника CBD касается его сторон CB и CD в точках P и Q . Докажите, что точки M , N , P , Q лежат на одной прямой.
4. Через вершину A треугольника ABC проведена произвольная прямая ℓ , лежащая вне треугольника. Окружность ω_B касается отрезка AB , продолжения стороны BC за точку B и прямой ℓ в точке P . Окружность ω_C касается отрезка AC , продолжения стороны BC за точку C и прямой ℓ в точке Q . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора прямой ℓ .

5. Даны три окружности равного радиуса. Для каждой окружности из её центра проведены касательные к двум другим окружностям так, как показано на рисунке. Докажите, что

$$AB + CD + EF = BC + DE + FA.$$



6. На сторонах AB , AD описанного четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки X и Y соответственно. Отрезки BY и DX пересекаются в точке Z . (а) Докажите, что если $AXZY$ — описанный, то $BCDZ$ — тоже описанный. (б) Докажите, что если $BCDZ$ — описанный, то $AXZY$ — тоже описанный.
7. К двум непересекающимся окружностям ω_I и ω_J с центрами I и J проведены два отрезка общих внешних касательных. На одном отрезке отмечена точка A , на другом — точки B и C так, что AB касается ω_I и AC касается ω_J . Невписанная окружность треугольника ABC касается отрезка BC в точке D . Докажите, что середина отрезка IJ равноудалена от точек A и D .
8. На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка X . Общая внешняя касательная к вписанным окружностям треугольников ABX и ACX , отличная от BC , пересекает отрезок AX в точке Y . Докажите, что длина отрезка AU не зависит от выбора точки X .