

Серия 4^{1/2}. Дополнительный листик.

1. Докажите, что окружность, проходящая через основания проекций вершины D параллелограмма $ABCD$ на стороны треугольника ABC , проходит через точку пересечения диагоналей параллелограмма.
2. (*Окружность Тейлора*) Докажите, что шесть проекций оснований высот остроугольного треугольника на стороны этого треугольника лежат на одной окружности.
3. Пусть X — точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$) с перпендикулярными диагоналями. На стороне AD отметили точку K . Описанные окружности треугольников AXK , DXK вторично пересекают отрезки AB , CD в точках M , N соответственно. Докажите, что центр описанной окружности треугольника MKN лежит на средней линии трапеции.
4. На плоскости отмечены точки A, B, C, P , причём A, B и C лежат на одной прямой, а P на ней не лежит. Обозначим описанные окружности треугольников BSP, CAP, ABP за $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ соответственно. Пусть A_1, B_1, C_1 — вторые точки пересечения прямых AP, BP, CP с $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ соответственно. Прямые BC_1 и CB_1 пересекаются в точке A_2 ; точки B_2 и C_2 определены аналогично. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равны.
5. Пусть A_1, B_1, C_1 — середины сторон остроугольного треугольника ABC ($AB > AC$). Прямая AA_1 пересекает описанную окружность треугольника $A_1B_1C_1$ в точке S ; точка T — проекция A на A_1B_1 . Отрезки C_1T и BS пересекаются в точке X . Докажите, что вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников BC_1X и STX лежит на прямой BC .