

## Серия 4. Угол между хордой и касательной.

**Теорема.** На окружности  $\omega$  отмечены точки  $A$  и  $B$ , через точку  $A$  проведена прямая  $\ell$ . Тогда  $\ell$  касается  $\omega$ , если и только если  $\angle(\ell, AB)$  равен половине меры дуги  $\widehat{AB}$ .

1. Касательная к описанной окружности неравнобокого треугольника  $ABC$ , восстановленная в вершине  $A$ , пересекает прямую  $BC$  в точке  $S$ ; точка  $L$  — основание биссектрисы  $AL$  треугольника. Докажите, что  $SA = SL$ .
2. Биссектрисы углов  $B$  и  $C$  остроугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $I$  и пересекают высоту из вершины  $A$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямая  $AI$  касается описанной окружности треугольника  $IPQ$ .
3. Точка  $H$  — ортоцентр остроугольного треугольника  $ABC$ . Касательные к описанным окружностям треугольников  $AHB$  и  $AHC$ , восстановленные в точке  $H$ , пересекают прямую  $BC$  в точках  $X$  и  $Y$  соответственно. Докажите, что  $XH = YH$ .
4. На стороне  $AB$  остроугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) отмечена точка  $X$ . Касательная к описанной окружности треугольника  $BXC$ , восстановленная в вершине  $X$ , пересекает описанную окружность треугольника  $ACX$  в точках  $X$  и  $Y$ . Докажите, что  $AU \parallel BC$ .
5. **Лемма Архимеда.** Окружность  $\omega$  касается хорды  $MN$  окружности  $\Omega$  в точке  $B$ , а окружности  $\Omega$  в точке  $A$ . Докажите, что  $AB$  является биссектрисой угла  $MAN$ .
6. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$ . На «меньших» дугах  $AB$  и  $AC$  его описанной окружности отмечены точки  $C_0$  и  $B_0$  соответственно. Отрезок  $BB_0$  пересекает сторону  $AC$  в точке  $B_1$ ; отрезок  $CC_0$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_1$ . Докажите, что описанные окружности треугольников  $AB_1B_0$  и  $AC_1C_0$  касаются.
7. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$ ,  $AB = AC$ ;  $O, I$  — центры его описанной и вписанной окружностей соответственно. Окружность  $\omega$  описана вокруг треугольника  $BIO$  и пересекает описанную окружность треугольника  $ABC$  в точке  $D$ . Докажите, что  $AD$  — касательная к  $\omega$ .
8. Пусть  $O$  — центр описанной окружности остроугольного равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ). Прямые  $BO$  и  $CO$  пересекают стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $B'$  и  $C'$  соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через  $C'$  параллельно  $AC$ , касается описанной окружности треугольника  $B'OC$ .