

## Серия 3. Прямые углы и вписанные четырёхугольники.

1. В остроугольном треугольнике  $ABC$  высоты  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  пересекаются в точке  $H$ . Докажите, что  $H$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $A_1B_1C_1$ .
2. Основание  $A_1$  высоты  $AA_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  отразили симметрично относительно прямой  $AC$ . Докажите, что отражённая точка лежит на прямой  $B_1C_1$ , где  $B_1$  и  $C_1$  — основания двух других высот треугольника.
3. На высоте  $AA_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  отмечена точка  $P$ . Пусть  $P_C$  и  $P_B$  — проекции точки  $P$  на прямые  $AB$ ,  $AC$  соответственно. Докажите, что точки  $B$ ,  $C$ ,  $P_B$ ,  $P_C$  лежат на одной окружности.
4. Из основания  $A_1$  высоты  $AA_1$  остроугольного треугольника  $ABC$  опустили перпендикуляры стороны  $AB$ ,  $AC$  и на высоты  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Докажите, что четыре основания опущенных перпендикуляров лежат на одной прямой.
5. (Теорема Симсона) На описанной окружности треугольника  $ABC$  отметили точку  $P$ . Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из точки  $P$  на стороны треугольника, лежат на одной прямой.
6. Точка  $O$  — центр описанной окружности остроугольного треугольника  $ABC$ , в котором  $AB > AC$ . Пусть  $X$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $B$  на  $AO$ ,  $M$  — середина  $BC$ ,  $AA_1$  — высота треугольника  $ABC$ . Докажите, что  $XM = MA_1$ .
7. В остроугольном треугольнике  $ABC$  на продолжениях высот  $BB_1$  и  $CC_1$  за точки  $B_1$  и  $C_1$  отметили точки  $B_2$  и  $C_2$  соответственно. Оказалось, что  $\angle B_2AC_2 = 90^\circ$ . Из точки  $A$  опустили перпендикуляр  $AH$  на  $B_2C_2$ . Докажите, что  $\angle BHC = 90^\circ$ .
8. Докажите, что в остроугольном треугольнике середины двух высот, основание третьей и ортоцентр лежат на одной окружности.