Серия 2. Вписанные четырёхугольники.

1. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, K — середина «меньшей» дуги AB, не содержащей точек C и D. Пусть P и Q — точки пересечения пар хорд CK и AB, DK и AB соответственно. Докажите, что четырёхугольник $CPQD$ — вписанный.

2. **Лемма об отражении ортоцентра.** Ортоцентр H вписанного в окружность Ω треугольника ABC отразили относительно прямой BC и относительно середины стороны BC. Получились точки X и Y соответственно. **(a)** Докажите, что точки X и Y лежат на Ω; **(b)** Докажите, что AY — диаметр Ω.

3. Точка O — центр описанной окружности равнобокой трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), K — точка пересечения её диагоналей. Докажите, что точки A, B, K, O лежат на одной окружности.

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D. Окружность, описанная около треугольника ADB, пересекает сторону AC в точке M, а окружность, описанная около треугольника ADC, пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq A$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN. Докажите, что $OD \perp BC$.

5. На диагонали AC ромба $ABCD$ взята произвольная точка E, отличная от точек A и C, а на прямых AB и BC — точки N и M соответственно так, что $AE = NE$ и $CE = ME$. Пусть K — точка пересечения прямых AM и CN. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

6. Точка M — середина стороны BC остроугольного треугольника ABC, в котором $AB > AC$. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Касательные к Ω, проведённые в точках B и C, пересекаются в точке P. Отрезки AP и BC пересекаются в точке S. Пусть BD — высота треугольника ABP. Окружность ω, описанная около треугольника CSD, пересекает окружность Ω в точке $K \neq C$. Докажите, что $\angle CKM = 90^\circ$.

7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ ($\angle A < 90^\circ$) отмечена точка T так, что треугольник ATD — остроугольный. Пусть O_1, O_2 и O_3 — центры описанных окружностей треугольников ABT, DAT и CDT соответственно. Докажите, что точка пересечения высот треугольника $O_1O_2O_3$ лежит на прямой AD.