Серия 1. Вписанные углы, счёт дуг.

Определения. На окружности ω с центром O отмечены точки A, B, C. Пусть $\overset{\frown}{BC}$ — «меньшая» (т. е. не содержащая A) дуга BC окружности ω. *Мерой* дуги $\overset{\frown}{BC}$ назовём величину *центрального* угла BOC (может быть больше 180°); угол BAC называется *вписанным* углом, опирающимся на $\overset{\frown}{BC}$.

Теорема. Мера вписанного в окружность угла равна половине меры дуги, на которую он опирается.

1. Пусть M и N — середины «меньшей» и «большей» дуг BC описанной окружности треугольника ABC соответственно. Докажите, что **(a)** AM — биссектриса угла BAC; **(b)** AN — биссектриса внешнего угла BAC.

2. *Невероятно полезная задача.* **(a)** Хорды AC и BD окружности пересекаются в точке S. Докажите, что угол ASB равен полусумме «меньших» дуг AB и CD. **(b)** В этой же картинке лучи AB и DC пересекаются в точке P. Докажите, что угол APD равен полуразности «меньших» дуг AD и BC.

3. На окружность в указанном порядке отмечены точки A, B, C, D. Пусть K, L, M, N — середины «меньших» (т. е. не содержащих других отмеченных точек) дуг AB, BC, CD, DA соответственно. Докажите, что $KM \perp LN$.

4. Пусть D — отражение вершины A остроугольного треугольника ABC относительно BC. Отрезки BD, CD пересекают описанную окружность треугольника ABC в точках P и Q. Докажите, что AD — биссектриса угла PAQ.

5. Внутри остроугольного треугольника ABC нашлась такая точка P, что $\angle BPC = \angle BAC + 60^\circ$, $\angle CPA = \angle CBA + 60^\circ$, $\angle APB = \angle ACB + 60^\circ$. Лучи AP, BP, CP продлили до пересечения с описанной окружностью треугольника ABC. Докажите, что полученные точки пересечения лежат в вершинах равностороннего треугольника.

6. Две окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках M и N. Окружность ω с центром в M пересекает ω_1 в точках A и C, ω_2 — в точках B и D. Известно, что N лежит вне ω. Докажите, что $\angle ANB = \angle DNC$.

7. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. Лучи AB и DC пересекаются в точке P, лучи BC и AD — в точке Q. Биссектриса угла APD пересекает отрезки AD и BC в точках K и M; биссектриса угла AQB пересекает отрезки AB и CD в точках L и N. Докажите, что $KLMN$ — ромб.

8. В треугольнике ABC ($AB < AC$) проведена биссектриса AA_1. Перпендикуляр из A_1 на AC пересекает «меньшую» дугу AC описанной окружности Ω треугольника ABC в точке K. Перпендикуляр из A на BK пересекает BC в точке L. Докажите, что точки K, L и середина «меньшей» дуги BC окружности Ω лежат на одной прямой.

9. Окружность Ω описана около остроугольного треугольника ABC. На стороне AB выбрана точка D, а на стороне AC — точка E так, что $BC \parallel DE$. Точки P и Q на «меньшей» дуге BC окружности Ω таковы, что $DP \parallel EQ$. Лучи QB и PC пересекают прямую DE в точках X и Y соответственно. Докажите, что $\angle XAY + \angle PAQ = 180^\circ$.