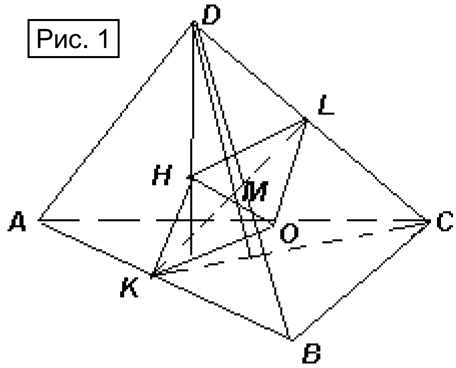
Тетраэдры: прямая Эйлера, сферы 12 и 24 точек

Так как тетраэдры являются в каком-то смысле пространственными аналогами треугольников, то интересно посмотреть на некоторые факты, аналогичные тем, которые встречаются в геометрии треугольника. Наиболее полные аналогии возникают при рассмотрении ортоцентрического тетраэдра, так как только в нем высоты пересекаются в одной точке. В частности, в ортоцентрическом тетраэдре существует почти полная аналогия с прямой Эйлера треугольника.

Теорема. ***В ортоцентрическом тетраэдре центроид является серединой отрезка, соединяющего его ортоцентр и центр описанной около него сферы***.

Доказательство. Пусть *H* – ортоцентр, *M* – центроид, *O* – центр описанной сферы тетраэдра *DABC* (см. рис. 1). Тогда $\overline{OM} = \frac{1}{4}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$. Для того чтобы доказать требуемое достаточно доказать, что $\overline{OH} = 2\overline{OM} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$.

Рис. 1



Действительно, пусть точка *X* такова, что $\overline{OX} = \frac{1}{2}\left(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$.

Тогда $\overline{AX} = \overline{OX} - \overline{OA} = \frac{1}{2}\left(-\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$ = $\frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)$. $\overline{AX} \cdot \overline{CD} = \frac{1}{2}\left(\overline{AB} + \overline{OC} + \overline{OD}\right)\overline{CD} = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \left(\overline{OD} + \overline{OC}\right)\left(\overline{OD} - \overline{OC}\right) = 0$. Следовательно, $\overline{AX} \perp \overline{CD}$. Аналогично доказывается, что $\overline{AX} \perp \overline{BC}$, поэтому прямая *AX* содержит высоту тетраэдра. Таким же образом получим, что прямые *BX*, *CX* и *DX* содержат высоты тетраэдра, то есть точка *X* совпадает с *H*.

Следовательно, ***OH* – прямая Эйлера для ортоцентрического тетраэдра**.

Другие аналогии для ортоцентрического тетраэдра – см. задачи 5 – 8. Остальные задачи содержат факты, аналогичные планиметрическим, для произвольных тетраэдров или других его видов. В случае затруднений вам могут помочь аналогичные факты или задачи планиметрии.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

В задачах 1 – 8 постарайтесь найти планиметрические аналоги.

1. На каждой грани правильного тетраэдра с ребром 1 во внешнюю сторону построены правильные тетраэдры. Четыре их вершины, не принадлежащие исходному тетраэдру, образовали новый тетраэдр. Найдите его ребра.

2. Пусть *R* и *r* – радиусы описанной и вписанной сфер тетраэдра, *a* – длина его наибольшего ребра, *H* – длина наименьшей высоты тетраэдра. Докажите, что $\frac{R}{r} > \frac{a}{H}$.

3. В тетраэдре *PABC* проведены биссектрисы PA_1, PB_1 и PC_1 треугольников *PBC*, *PAC* и *PAB* соответственно. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.

4. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины тетраэдра с центрами окружностей, вписанных в противолежащие грани, пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда равны произведения длин противоположных ребер тетраэдра.

5. Точки *H* и *O* – ортоцентр и центр описанной сферы ортоцентрического тетраэдра *DABC* соответственно. Докажите, что: а) $\overline{HO} = \frac{1}{2}\left(\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} + \overline{HD}\right)$;

б) середины любых двух скрещивающихся ребер этого тетраэдра вместе с точками *O* и *H* являются вершинами параллелограмма;

в) $OH^2 = 4R^2 - 3d^2$, где *R* – радиус описанной сферы, *d* – длина бимедианы;

г) $HA^2 + HB^2 + HC^2 + HD^2 = 4R^2$.

6. а) Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре окружности девяти точек всех граней лежат на одной сфере.

б) Объясните, почему эту сферу назвали ***сферой двадцати четырех точек***.

7. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре центроиды граней, ортоцентры граней, а также точки, которые делят отрезки, соединяющие ортоцентр тетраэдра с его вершинами, в отношении 2 : 1 (считая от вершины) лежат на одной сфере, которая называется ***сферой двенадцати точек.***

8. Пусть *M*’ и *H*’ – центроид и ортоцентр какой-либо грани ортоцентрического тетраэдра, *K* и *N* – точки пересечения лучей *HM*’ и *H’M* соответственно с описанной около тетраэдра сферой. Докажите, что: а) $\frac{HM'}{M'K} = \frac{1}{2}$; б) $\frac{H'M}{MN} = \frac{1}{3}$.

9. Сфера, вписанная в тетраэдр *SABC*, касается граней *SAB*, *SBC* и *SCA* в точках *D*, *E* и *F* соответственно. Какие значения может принимать сумма углов *SDA*, *SEB* и *SFC*?

10. Высота равногранного тетраэдра равна h, а высота грани делится ортоцентром этой грани на отрезки, равные h_1 и h_2. Докажите, что $h^2 = 4h_1h_2$.