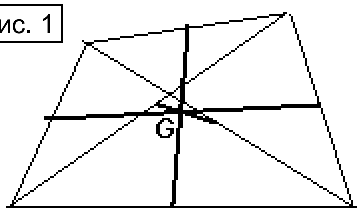
17.04.18

Замечательные точки и линии четырехугольников

Использованы материалы Д. Швецова и А. Мякишева.

Рис. 1



Мы уже встречались с некоторыми интересными точками и прямыми в четырехугольниках. Например, центроид G четырехугольника – точка пересечения его средних линий. Она же – середина отрезка, соединяющего середины диагоналей (см. рис. 1). Почему? [Единственность центроида системы точек] Кроме того, в задачах различных занятий возникали прямые Гаусса, Ньютона, Обера - Штейнера. Эти задачи, в свое время, почти никто не решил, поэтому я вновь их включил в концовку задач этого занятия.

Напомню, что в геометрии треугольника большую роль играет связь между центроидом, ортоцентром и центром описанной окружности (прямая Эйлера), а также окружность девяти точек. В первой части задач этого занятия рассматриваются различные обобщения этих понятий для четырехугольника (сначала для вписанного, а потом для произвольного).

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. (*Ортоцентр вписанного четырехугольника*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть H_a, H_b, H_c и H_d – ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Докажите, что:

а) отрезки AH_a, BH_b, CH_c и DH_d пересекаются в одной точке H (*ортоцентре*).

б) четырехугольник $H_a,H_bH_cH_d$ равен четырехугольнику $ABCD$.

2. (*Теорема Монжа*) Докажите, что перпендикуляры, проведенные из середин вписанного четырехугольника к противолежащим сторонам, пересекаются в ортоцентре H этого четырехугольника.

3. (*Прямая Эйлера вписанного четырехугольника*) Докажите, что во вписанном четырехугольнике центроид G, центр O описанной окружности и ортоцентр H лежат на одной прямой и G – середина отрезка OH.

4. (*Окружность Эйлера вписанного четырехугольника*) Дан вписанный четырехугольник $ABCD$. Пусть O_a, O_b, O_c и O_d – центры окружностей девяти точек треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. Докажите, что:

а) эти центры лежат на одной окружности;

б) все указанные окружности пересекаются в ортоцентре H четырехугольника.

5. (*Точка Понселе четырехугольника*) Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCD$ окружности девяти точек треугольников BCD, ACD, ABD и ABC пересекаются в одной точке.

6. (*Квазицентр описанной окружности четырехугольника*) Пусть P – точка пересечения диагоналей четырехугольника $ABCD$, M – его центроид, O – точка пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям, H – точка пересечения прямых, соединяющих ортоцентры треугольников APD и BPC, APB и CPD. Докажите, что M – середина отрезка OH.

7. а) (*Прямая Ньютона*) Докажите, что во всяком описанном четырёхугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.

б) Докажите, что центр O окружности, вписанной в четырехугольник $ABCD$, у которого нет параллельных сторон, совпадает с его центроидом тогда и только тогда, когда $OA\cdot OC = OB\cdot OD$.

8. (*Прямая Гаусса*) Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.

9. (*Прямая Обера – Штейнера*) Продолжения сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке F, а продолжения сторон BC и AD – в точке E. Докажите, что:

а) ортоцентры треугольников ABE, CDE, ADF и BCF лежат на одной прямой.

б) эта прямая перпендикулярна прямой Гаусса.

10. (*Четырехугольник как однородная пластина*) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$: G_a и H_a, G_b и H_b, G_c и H_c, G_d и H_d – центроиды и ортоцентры треугольников BCD, ACD, ABD и ABC соответственно. G – точка пересечения прямых G_aG_c и G_bG_d, H – точка пересечения прямых H_aH_c и H_bH_d.

а) Пусть около $ABCD$ можно описать окружность с центром O. Докажите, что точки H, G и O лежат на одной прямой и $HG : GO = 2 : 1$.

б) Докажите, что утверждение пункта а) справедливо для произвольного четырехугольника $ABCD$, если в качестве O взять точку пересечения серединных перпендикуляров к диагоналям.

в) (*Точка Нагеля описанного четырехугольника*) Пусть в $ABCD$ можно вписать окружность с центром I. N – точка пересечения двух прямых, каждая из которых проходит через точки на противоположных сторонах четырехугольника, симметричные точкам касания вписанной окружности со сторонами относительно середин этих сторон. Докажите, что точки N, G и I лежат на одной прямой и $NG : GI = 2 : 1$.