

### Примеры и контрпримеры в стереометрии\_3

На этом занятии – очередная подборка задач на примеры и контрпримеры в стереометрии. Напомню, что в первом таком занятии, в основном, фигурировали параллелепипеды, во втором – пирамиды. В задачах, предлагаемых сегодня могут и в условиях и в решениях возникать самые разные многогранники и не только они.

Так как в разных источниках даются различные определения многогранников, то договоримся о нем.

**Определение.** Многогранником называется тело, поверхность которого состоит из конечного количества многоугольников.

Большая часть задач – сравнительно простые, задачи с последними номерами – посложнее, но это субъективная оценка, поэтому сами выбирайте порядок, в котором их решать.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли многогранник, у которого все грани – равнобокие трапеции?
2. Существует ли невыпуклый многогранник, имеющий ровно пять вершин?
3. Существует ли многогранник, имеющий столько же вершин, ребер и граней, сколько у куба, но не имеющий ни одной четырехугольной грани?
4. Существует ли одиннадцатигранник, у которого в каждой грани – четное количество ребер?
5. Существует ли многогранник, проекциями которого на три попарно перпендикулярные плоскости являются: треугольник, четырехугольник и пятиугольник?
6. В набор «Юный геометр» входит несколько плоских граней, из которых можно собрать выпуклый многогранник. Юный геометр Саша разделил эти грани на две кучки. Могло ли случиться так, что из граней каждой кучки также можно собрать выпуклый многогранник?
7. Существует ли многогранник, у которого: а) нет трех граней с одинаковым количеством ребер; б) все грани имеют различное количество ребер?
8. Космический аппарат сел на неподвижный астероид, про который известно только, что он представляет собой шар или куб. Аппарат проехал по поверхности астероида в точку, симметричную начальной относительно центра астероида. Всё это время он непрерывно передавал свои пространственные координаты на космическую станцию, и там точно определили трёхмерную траекторию аппарата. Может ли этого оказаться недостаточно, чтобы отличить, по кубу или по шару ездил аппарат?
9. Все грани шестигранника – четырёхугольники, а в каждой его вершине сходятся по три ребра. Верно ли, что если для него существуют вписанная и описанная сферы, центры которых совпадают, то этот шестигранник – куб?
10. В куб с ребром 1 поместили восемь непересекающихся шаров (возможно, разного размера). Может ли сумма диаметров этих шаров быть больше 4?
11. Можно ли так выбрать шар, треугольную пирамиду и плоскость, чтобы всякая плоскость, параллельная выбранной, пересекала шар и пирамиду по фигурам равной площади?