20.03.18
27.03.18

Три точки в треугольнике

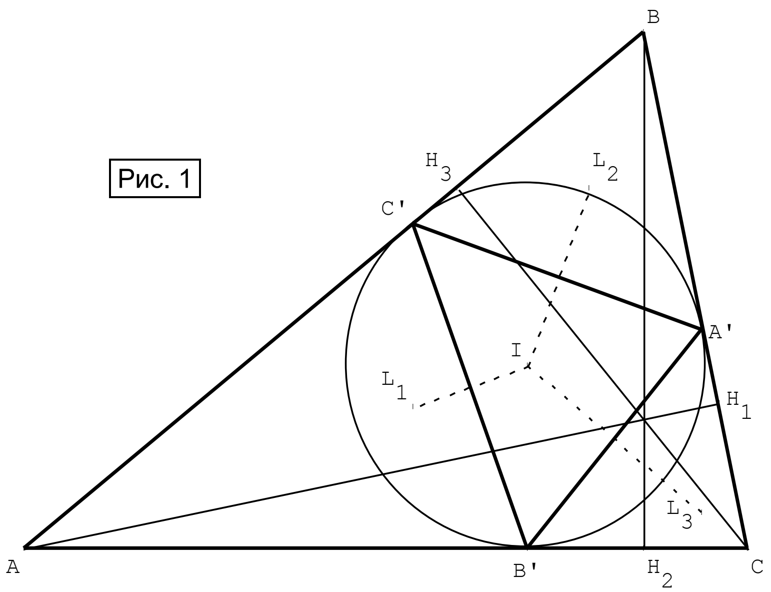
По материалам Л.А. и Т.Л. Емельяновых (из конференции турнира городов).

Рассмотрим следующую конструкцию.

Пусть в треугольнике *ABC* вписанная окружность, имеющая центром точку *I*, касается сторон *BC*, *CA* и *AB* в точках *A'*, *B'* и *C'* соответственно. Отразим точку *I* относительно сторон треугольника *A'B'C'* и обозначим полученные точки L_1, L_2 и L_3 (см. рис. 1).

С ее свойствами вы познакомитесь в процессе решения задач. Конструкция «богатая», поэтому материал рассчитан на два занятия. Но если кто-то справится быстрее, то будет «добавка».

Рис. 1



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах используются следующие обозначения: основания высот треугольника ABC – H_1, H_2, H_3; углы треугольника ABC – $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$*; стороны треугольника ABC –* $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$*; окружность, проходящая через точки X, Y, Z – (XYZ), центр описанной окружности ΔABC – точка O. Треугольник A'B'C' называется треугольником Жергонна.*

Докажите следующие факты:

1. Треугольники $L_1L_2L_3$ и *A'B'C'* центрально-симметричны.

2. L_1, L_2 и L_3 – ортоцентры треугольников *AB'C'*, *BC'A'* и *CA'B'* соответственно.

3. а) Центр *I* вписанной окружности треугольника ABC – ортоцентр треугольника $L_1L_2L_3$.

б) Центр H' окружности ($L_1L_2L_3$) – ортоцентр треугольника Жергонна.

4. L_1, L_2 и L_3 – центры вписанных окружностей для треугольников AH_2H_3, BH_3H_1 и CH_1H_2 соответственно.

5. а) Общие попарные внешние касательные к окружностям, вписанным в треугольники AH_2H_3, BH_3H_1 и CH_1H_2, (отличные от сторон треугольника *ABC*) пересекаются в одной точке – центре H' окружности ($L_1L_2L_3$).

б) Эти общие внешние касательные параллельны сторонам ортотреугольника $H_1H_2H_3$.

в) Прямые L_1H', L_2H' и L_3H' перпендикулярны сторонам треугольника *ABC*.

6. Точки A, B, L_1, L_2 лежат на одной окружности (окружность ω_3).

Аналогично для четвёрок B, C, L_2, L_3 *(окружность* ω_1*) и* A, C, L_1, L_3 *(окружность* ω_2*).*

7. а) Треугольники $H_1H_2H_3$ и $L_1L_2L_3$ перспективны (*прямые, соединяющие соответствующие вершины, пересекаются в одной точке*).

б) Пусть A_0, B_0 и C_0 – середины сторон *BC*, *CA* и *AB* соответственно. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $L_1L_2L_3$ перспективны.

8. Прямая *IO* является прямой Эйлера для треугольника *A'B'C'*.

9. а) Центр гомотетии треугольников *A'B'C'* и $L_1L_2L_3$ лежит на прямой *IO*.

б) Центр описанной окружности треугольника $L_1L_2L_3$ лежит на прямой IO, которая, таким образом, является общей прямой Эйлера для треугольников $A'B'C'$ и $L_1L_2L_3$.

10. Центры O_1, O_2 и O_3 окружностей ω_1, ω_2 и ω_3 соответственно (см. задачу 6) образуют треугольник, гомотетичный треугольнику $L_1L_2L_3$.

11. а) Центром окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, является точка O.

б) Центр гомотетии треугольников $O_1O_2O_3$ и $L_1L_2L_3$ лежит на прямой IO.

в) Радиус окружности, описанной около треугольника $O_1O_2O_3$, равен $R+r$, где R и r – радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC.

12. Радикальные оси окружности ($O_1O_2O_3$) и окружностей ω_1, ω_2, ω_3 образуют треугольник $A_1B_1C_1$, гомотетичный треугольнику ABC с центром в точке I.

13. а) Пусть I_1, I_2 и I_3 – центры вневписанных окружностей треугольника ABC. Тогда треугольники $I_1I_2I_3$ и $L_1L_2L_3$ гомотетичны с центром в точке I.

б) Треугольники $I_1I_2I_3$ и $O_1O_2O_3$ гомотетичны с центром на прямой IO.

14. Попарные центры внешних гомотетий трёх окружностей из задачи 4 лежат на одной прямой t, перпендикулярной IO.

15. Обозначим попарные касательные из задачи 5: l_{12}, l_{23} и l_{31} (индексы прямых соответствуют номерам центров окружностей). Обозначим точки касания окружности, вписанной в треугольник H_1BH_3 с прямыми AB и BC через P и Q, а с прямыми l_{23} и l_{12} через P_1 и Q_1. Пусть P_2 и Q_2 – точки пересечения AB с l_{23} и BC с l_{12}. Тогда прямые PQ, P_1Q_1 и P_2Q_2 пересекаются в одной точке, находящейся на прямой t.

Аналогично и для двух других окружностей, вписанных в соответствующие треугольники.

16. а) Окружности $(L_1B'C')$, $(L_2C'A')$ и $(L_3A'B')$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$.

б) Окружности $(A'L_2L_3)$, $(B'L_3L_1)$ и $(C'L_1L_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на вписанной окружности треугольника ABC.

в) Окружности $(L_1H_2H_3)$, $(L_2H_3H_1)$ и $(L_3H_1H_2)$ пересекаются в одной точке, лежащей на окружности $(L_1L_2L_3)$.

17. а) Точки A', H_1, L_2 и L_3 лежат на одной окружности, проходящей через точку Фейербаха (*точку касания вписанной окружности и окружности девяти точек*).

Аналогично для четвёрок B', H_2, L_1, L_3 *и* C', H_3, L_1, L_2.

б) Центры трех окружностей, определённых в пункте а), образуют треугольник $S_1S_2S_3$, подобный треугольнику ABC.

в) Треугольники $S_1S_2S_3$ и ABC имеют общий центр вписанной окружности.

г) Треугольники $S_1S_2S_3$ и $A_0B_0C_0$ (см. задачу 7б) имеют общий центр описанной окружности.