

Ортоцентрический тетраэдр

Определение. *Тетраэдр называется ортоцентрическим, если каждая его вершина проектируется в ортоцентр противоположной грани.*

Почему такой тетраэдр существует? [Например, **правильный** или **прямоугольный** тетраэдры являются ортоцентрическими]

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что тетраэдр является ортоцентрическим тогда и только тогда, когда:
 - а) противоположные ребра попарно перпендикулярны (достаточно двух пар!);
 - б) равны его бимедианы;
 - в) грани описанного параллелепипеда являются ромбами с равными сторонами;
 - г) прямые, содержащие его высоты, пересекаются в одной точке;
 - д) перпендикуляры к граням, восстановленные из их центроидов, пересекаются в одной точке;
 - е) равны углы между противоположными ребрами;
 - ж) равны суммы квадратов длин противоположных ребер;
 - з) середины всех ребер тетраэдра лежат на одной сфере.
2. Обязательно ли ортоцентрический тетраэдр является правильным, если:
 - а) он является равногранным;
 - б) его ортоцентр совпадает с центроидом;
 - в) его ортоцентр совпадает с центром описанной сферы;
 - г) его ортоцентр совпадает с центром вписанной сферы;
 - д) он является каркасным?
3. Длины скрещивающихся ребер ортоцентрического тетраэдра равны a и b . Найдите длину его бимедианы.
4. Дан ортоцентрический тетраэдр $ABCD$.
 - а) Через каждое ребро с вершиной D проведена плоскость, параллельная противоположному ребру. Докажите, что эти плоскости вместе с плоскостью ABC ограничивают пирамиду с равными боковыми ребрами.
 - б) Пусть K , L и M – основания высот треугольника ABC . Докажите, что боковые грани пирамиды $DKLM$ одинаково наклонены к плоскости основания.
5. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:
 - а) общие перпендикуляры к скрещивающимся ребрам пересекаются в одной точке;
 - б) попарные произведения косинусов двугранных углов при скрещивающихся ребрах равны.
6. Докажите, что в ортоцентрическом тетраэдре:
 - а) все плоские углы при одной и той же вершине имеют один и тот же вид (либо острые, либо прямые, либо тупые);
 - б) хотя бы одна из граней – остроугольный треугольник.