Прямоугольный и каркасный тетраэдры

На этом занятии мы рассмотрим еще два частных случая тетраэдров.

Определение1. ***Тетраэдр называется прямоугольным, если все плоские углы при одной из вершин – прямые*** (см. рис. 1а).

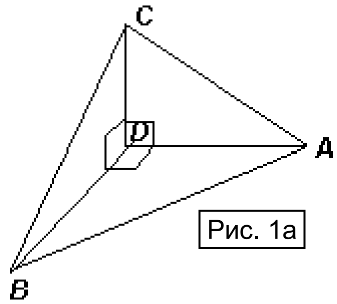

Рис. 1а

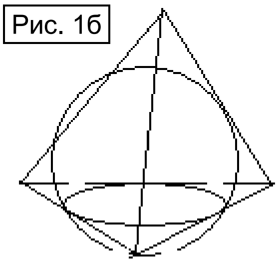

Рис. 1б

Очевидно, что в таком тетраэдре три высоты из четырех являются ребрами.

Определение2. ***Каркасным тетраэдром называется тетраэдр, для которого существует сфера,***
касающаяся всех его ребер.

Один из примеров такого тетраэдра – правильная пирамида (см. рис. 1б).

Со свойствами и признаками этих видов тетраэдров вы познакомитесь в процессе решения задач.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре:
а) ровно три прямых двугранных угла;
б) нет плоских тупых углов;
в) равны все бимедианы;
г) все грани описанного параллелепипеда – ромбы с равными сторонами.

2. Являются ли утверждения задачи 1 признаками прямоугольного тетраэдра?

3. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине D – прямые. Пусть $\angle CAD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$, $\angle ACB = \varphi$. Докажите, что $\cos\varphi = \sin\alpha\sin\beta$.

4. Докажите, что в прямоугольном тетраэдре: а) $S^2 = \sum_{k=1}^{3} S_k^2$, где S – площадь большей грани, S_k – площади остальных граней; б) $\frac{1}{H^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$, где a, b и c – длины ребер, образующих прямые углы, H – высота, проведенная к большей грани.

5. В тетраэдре $ABCD$ плоские углы при вершине A – прямые и $AB = AC + AD$. Найдите сумму плоских углов при вершине B.

6. Три двугранных угла тетраэдра – прямые.
а) Докажите, что в этом тетраэдре есть три плоских прямых угла.
б) Найдите длину его наибольшего ребра, если длины двух бимедиан равны a и b ($b > a$).
в) Данные двугранные углы не принадлежат одной вершине. Найдите остальные двугранные углы, если известно, что они равные.

---

7. Докажите, что если каркасный тетраэдр является равногранным, то он правильный.

8. Докажите, что тетраэдр является каркасным тогда и только тогда, когда:
а) перпендикуляры к его граням, проведенные через центры вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке;
б) окружности, вписанные в его грани, попарно касаются (имеют ровно оду общую точку);
в) равны суммы длин его скрещивающихся ребер;
г) все четырехугольники, получающиеся при развертке двух его соседних граней, являются описанными.

9. Докажите, что в каркасном тетраэдре:
а) суммы двугранных углов при противолежащих ребрах равны;.
б) отрезки, соединяющие точки касания сферы с противолежащими ребрами, пересекаются в одной точке.

10. Дан каркасный тетраэдр. Пусть отрезки касательных к сфере, проведенных из его вершин равны a, b, c и d. Всегда ли можно из этих четырёх отрезков сложить какой-нибудь треугольник? (*Не обязательно использовать все отрезки. Разрешается образовывать сторону треугольника из двух отрезков*.)