

### Полуправильный тетраэдр

В течение нескольких занятий мы займемся тетраэдрами, обладающими специальными свойствами.

**Определение.** *Тетраэдр называется полуправильным, если каждое его ребро равно противоположному ребру.*

Почему такой тетраэдр существует? [Например, **правильный** тетраэдр является полуправильным] Другое название полуправильного тетраэдра – **равногранный**. Почему это так – см. 1а.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что тетраэдр является полуправильным тогда и только тогда, когда:

- а) все его грани – равные треугольники;
- б) одна из его разверток является остроугольным треугольником с проведенными в нем средними линиями;
- в) равны суммы плоских углов при каждой вершине;
- г) все его грани – остроугольные треугольники с равными радиусами описанных окружностей;
- д) его бимедианы попарно перпендикулярны;
- е) его описанный параллелепипед – прямоугольный;
- ж) его бимедианы перпендикулярны ребрам, середины которых они соединяют;
- з) все его грани равновелики;
- и) равны все его высоты;
- к) центры его описанной и вписанной сфер совпадают;
- л) его центроид совпадает с центром описанной сферы;
- м) его центроид совпадает с центром вписанной сферы;

2. Докажите, что тетраэдр является равногранным, если:

- а) сумма плоских углов при двух его вершинах равна  $180^\circ$  и два противоположных ребра равны;
- б) сумма плоских углов при одной из его вершин равна  $180^\circ$  и равны две пары противоположных ребер.

3. Ребра равногранного тетраэдра равны  $a$ ,  $b$  и  $c$ . Найдите: а) радиус его описанной сферы; б) его объем.

4. Докажите, что в равногранном тетраэдре:

- а) центры четырех невписанных сфер лежат на описанной сфере и являются вершинами тетраэдра, равного исходному;
- б) радиус невписанной сферы в два раза больше радиуса вписанной сферы.