13.02.18

Основные свойства тетраэдра

I. Определения. 1) ***Медианой тетраэдра*** называется отрезок, соединяющий его вершину с центром тяжести противолежащей грани.

2) ***Бимедианой тетраэдра*** называется отрезок, соединяющий середины противолежащих ребер тетраэдра.

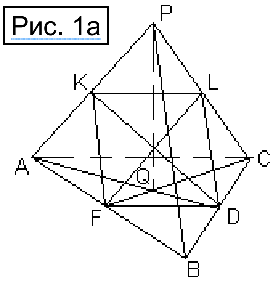
Сколько у тетраэдра: а) медиан; б) бимедиан? [а) **4**; б) **3**]

Свойства

1) ***Медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней в отношении 3 : 1, считая от вершины***.

2) ***Бимедианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам***.

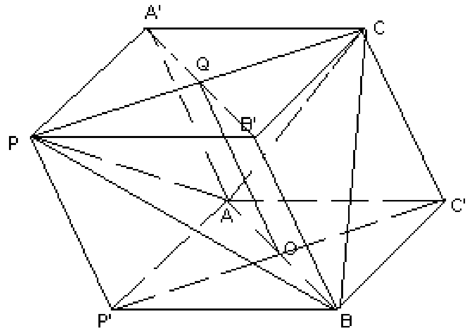
3) Точки пересечения медиан и бимедиан совпадают.



Каждое из этих утверждений несложно доказать геометрически, но можно их доказать «скопом», если использовать понятие ***центроида системы точек***.

Действительно, найдем его для вершин тетраэдра двумя способами и используем его единственность: В одном случае получим точку на медиане, которая делит ее в нужном отношении и это справедливо для каждой медианы; в другом случае, это будет середина отрезка, соединяющего середины двух бимедиан (для каждой пары). Но две бимедианы пересекаются в их общей середине (*параллелограмм, см. рис. 1а*).

Таким образом, центроид и есть их общая точка пересечения.



II. Через каждое ребро тетраэдра проведем плоскость, параллельную противолежащему ребру. Какую фигуру ограничивают эти плоскости?

Понятно, что получится ***параллелепипед***, который называют ***описанным*** для данного тетраэдра (см. рис. 1б). Его можно определить и по-другому.

Определение. ***Параллелепипед называется описанным для данного тетраэдра, если его четыре вершины, из которых никакие три не лежат в одной грани, являются вершинами тетраэдра,***.

Дан параллелепипед Сколько существует тетраэдров, для которых он является описанным? [**Два**, см. рис. 1б]

Описанный параллелепипед помогает при решении многих задач, связанных с тетраэдрами.

При решении задач вам также могут понадобится основные формулы объемов: $V_{пар.} = S_{осн.} \cdot H$, $V_{пир.} = \frac{1}{3} S_{осн.} \cdot H$.

III. По аналогии с планиметрией:

Определения. 1) Сфера называется ***описанной около многогранника***, если весе его вершины на ней лежат.

2) Сфера называется ***вписанной в многогранник***, если она касается всех его граней.

Докажите, что для любого тетраэдра существует как описанная сфера, так и вписанная.

Действительно, пусть дан тетраэдр *DABC* (*изобразить два*).

а) Рассмотрим центр *O* окружности, описанной около грани *ABC*, восставим в точке *O* перпендикуляр к этой грани, и проведем плоскость, которая является серединным перпендикуляром к ребру *DA*. Точка *Q* их пересечения равноудалена от всех вершин тетраэдра, поэтому является центром искомой сферы.

Понятно, что в этой точке *Q* пересекаются шесть плоскостей – серединных перпендикуляров к ребрам.

б) Рассмотрим трехгранный угол с вершиной *D* и биссекторные плоскости его двугранных углов. Их пересечением является прямая, каждая точка которой равноудалена от трех граней тетраэдра с общей вершиной *D*. Наличие на ней точки *P*, равноудаленной от четырех граней тетраэдра следует из соображений непрерывности.

Понятно, что в этой точке *P* пересекаются шесть плоскостей – биссекторных к двугранным углам тетраэдра при его ребрах.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Через вершину тетраэдра проведены три плоскости, каждая из которых перпендикулярна ребру, не содержащему эту вершину. Докажите, что эти плоскости имеют общую прямую.

б) Через каждую вершину тетраэдра проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани и содержащая центр ее описанной окружности. Докажите, что эти четыре плоскости имеют общую точку.

2. Докажите, что центр сферы, вписанной в тетраэдр, лежит внутри тетраэдра, образованного точками ее касания с гранями.

3. а) Докажите, что любых четырех точек *A*, *B*, *C* и *D* выполняется равенство: $\overline{AB}\cdot\overline{CD}$ = $\dfrac{AD^2+BC^2-AC^2-BD^2}{2}$. б) Даны длины всех ребер тетраэдра. Найдите: угол между скрещивающимися ребрами, длину бимедианы и длину медианы.

4. Докажите, что биссекторная плоскость двугранного угла тетраэдра делит противоположное ребро на части, пропорциональные площадям граней, образующих этот угол.

5. Прямая *m* проходит через середины ребер *AB* и *CD* тетраэдра *ABCD*, а плоскость α, содержащая эту прямую, пересекает ребра *BC* и *AD* в точках *K* и *L*. Докажите, что прямая *m* делит отрезок *KL* пополам.

6. Докажите, что для любого тетраэдра существует треугольник со сторонами, равными произведениям длин его противолежащих ребер.

7. Докажите, что для любого тетраэдра существует не менее пяти и не более восьми сфер, каждая из которых касается всех плоскостей его граней.

8. Пусть S_1 и S_2 – площади двух граней тетраэдра с общим ребром *a*, α – двугранный угол между ними, *b* – ребро, противолежащее *a*, φ – угол между ребрами *a* и *b*. Докажите, что $S_1^2+S_2^2-2S_1S_2\cos\alpha=\frac{1}{4}\left(ab\sin\varphi\right)^2$.

9. а) Пусть S_i – площади граней тетраэдра, P_j – площади неравных граней его описанного параллелепипеда. Докажите, что $\sum_{i=1}^{4}S_i^2=\sum_{j=1}^{3}P_j^2$.

б) Пусть h_i – высоты тетраэдра, d_j – расстояния между его скрещивающимися ребрами. Докажите, что $\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{h_i^2}=\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{d_j^2}$.

10. Плоскость α пересекает прямые, содержащие ребра тетраэдра в шести точках. Для каждой из них рассмотрим точку, симметричную ей относительно середины этого же ребра. Докажите, что полученные шесть точек лежат в одной плоскости.