

Теорема об изогоналях

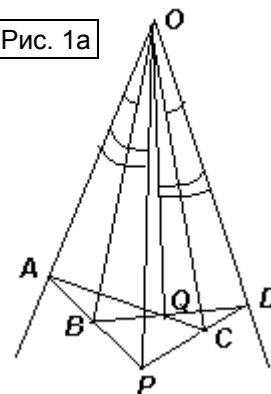
Использованы материалы статьи А. Куликовой и Д. Прокопенко.

На этом занятии будет предложен ряд задач, многие из которых предлагались на различных олимпиадах в разные годы. Оказалось, что для их решения можно использовать один и тот же факт, который мы предварительно докажем.

Напомню, что прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются **изогоналями** относительно этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть OB и OC изогонали угла AOD . Прямые AC и BD пересекаются в точке Q , а прямые AB и CD – в точке P . Тогда OP и OQ – также изогонали относительно угла AOD (см. рис. 1а).

Рис. 1а



Доказательство. Предварительно докажем **лемму** (см. задачу 3а занятия «Педальные треугольники. Изогональное сопряжение»): Лучи AP и AQ – изогонали угла BAC тогда и только тогда, когда расстояния от точек P и Q до сторон угла обратно пропорциональны.

Доказательство леммы. Проведем перпендикуляры к сторонам угла из точек P и Q , введя обозначения так, как на рис.

16. Если AP и AQ – изогонали, то $\angle PAB = \angle QAC$ и $\angle QAB = \angle PAC$. Из подобия треугольников PAY и QAZ

следует, что $\frac{AP}{AQ} = \frac{PY}{QZ}$, а из подобия

треугольников PAX и QAT следует, что $\frac{AP}{AQ} = \frac{PX}{QT}$. Тогда $\frac{PY}{PX} = \frac{QZ}{QT}$.

В обратную сторону рассуждаем от противного, зафиксировав, например точку P . Тогда, если AQ – не изогональ к AP , то левая часть равенства не изменяется, а правая – либо увеличивается, либо уменьшается.

Перейдем к доказательству теоремы. Проведем перпендикуляры к сторонам угла AOD из точек B, C, P и Q . Пусть x_P и y_P – расстояния от точки P до OA и OD соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния до сторон угла от точек B, C и Q (см. рис. 1в). По лемме, условие изогональности OP и OQ равносильно

выполнению равенства $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q} \Leftrightarrow$

$$\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1.$$

Из подобия четырех пар подобных треугольников получим:

$$\frac{x_P}{x_B} = \frac{AP}{AB}, \quad \frac{y_P}{y_C} = \frac{DP}{DC}, \quad \frac{x_Q}{x_C} = \frac{AQ}{AC},$$

Рис. 16

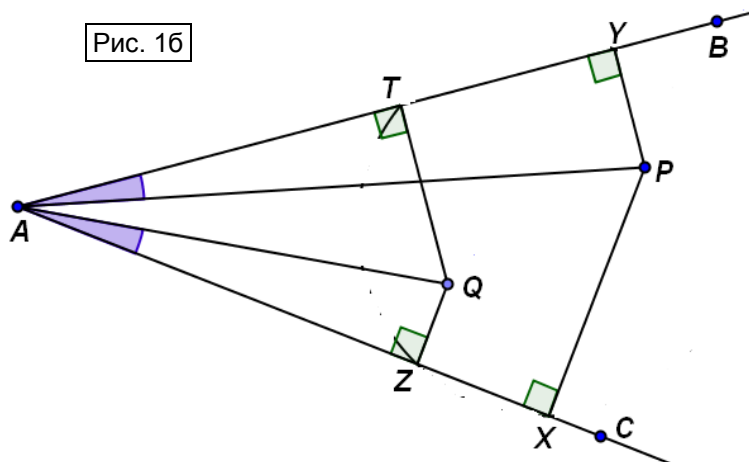
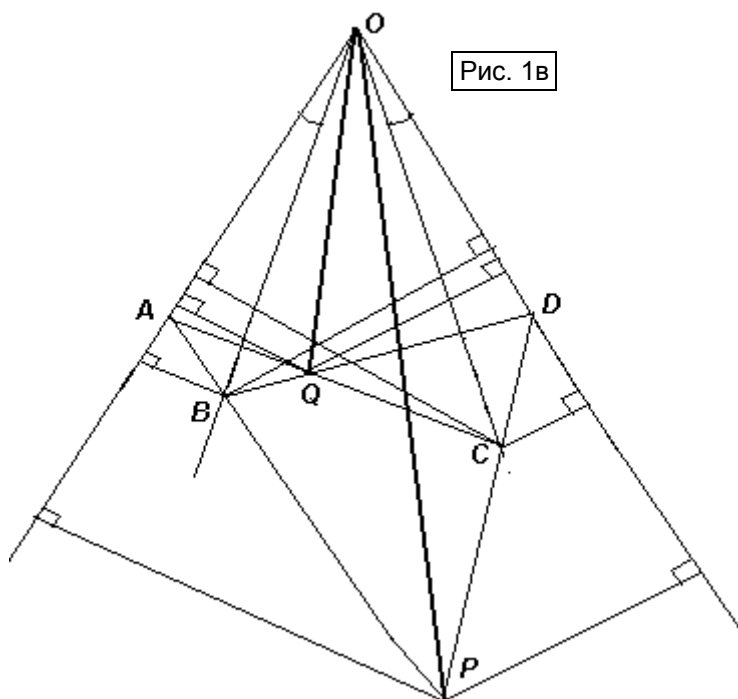


Рис. 1в



$$\frac{y_Q}{y_B} = \frac{DQ}{DB}. \text{ Тогда } \frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ}.$$

Так как точки B и C лежат на изогоналях, то $\frac{x_B x_C}{y_B y_C} = 1$. По теореме Менелая для

треугольника APC и прямой BD : $\frac{PB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DP} = 1$. Аналогично, для треугольника AQB и

прямой PD : $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DQ} \cdot \frac{QC}{CA} = 1$. Почленно перемножив последние два равенства, получим:

$$\frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ} = 1. \text{ Следовательно, } \frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1, \text{ что и требовалось.}$$

Прежде, чем вы перейдете к решению задач, **три комментария**:

- 1) теорема справедлива и для случая внешних изогоналей (то есть, точки P и Q могут лежать и вне угла AOD);
- 2) если лучи OP и OQ совпадают, то этот луч является биссектрисой угла AOD (вырожденный случай, который является следствием теоремы);
- 3) теорему можно обобщить на случай, когда P – бесконечно удаленная точка, то есть, когда $AB \parallel DC$. Тогда луч OP также им параллелен.

Действительно, пусть это не так и OP – не изогональ с OQ , тогда этой диагональю является луч OP , который должен пересечь AB и DC в одной и той же точке, что невозможно (см. рис. 1г).

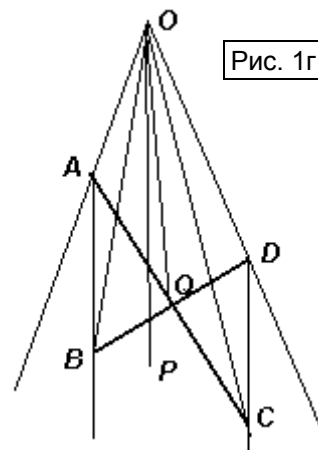


Рис. 1г

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике ABC чевианы AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1 A_1 C = \angle C_1 A_1 B$. Докажите, что AA_1 – высота треугольника ABC .
2. (Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 2008) Диагонали AC и BD четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке E , а прямые AB и DC – в точке F . На луче FE отмечена точка P так, что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, что $\angle APE = \angle DPE$.
3. (Турнир городов, 2006) В треугольнике ABC проведена биссектриса AA' , на которой отмечена точка X . Прямая BX пересекает AC в точке B' , а прямая CX пересекает AB в точке C' . Отрезки $A'B'$ и CC' пересекаются в точке P , а отрезки $A'C'$ и BB' – в точке Q . Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.
4. а) На сторонах AB и AC остроугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ABFE$ и $ACGT$. Докажите, что точка P пересечения прямых CF и BG лежит на высоте AA_1 треугольника ABC .
б) (Городская устная олимпиада по геометрии, 2010) Из вершины A параллелограмма $ABCD$ опущены перпендикуляры AM на BC и AN на CD . P – точка пересечения BN и DM . Докажите, что $AP \perp MN$.
в) Обобщите утверждения пунктов а) и б).
5. (Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, финал, 2016) Продолжения боковых сторон трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P , а ее диагонали – в точке Q . На меньшем основании BC отмечена точка M так, что $AM = MD$. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.
6. (Городская устная олимпиада по геометрии, 2014) Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Пусть I и J – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC соответственно, а I_a и J_a – центры их внеписанных окружностей, касающихся сторон BC и DC . Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла BCD .

7. а) На диагонали AC ромба $ABCD$ отмечена произвольная точка E . На прямых AB и BC выбраны точки N и M соответственно так, что $NE = AE$ и $ME = CE$. Прямые AM и CN пересекаются в точке K . Докажите, что точки K , E и D лежат на одной прямой.
- б) (Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, заочный тур, 2013) На стороне AB треугольника ABC выбирается произвольная точка C_1 . Точки A_1 и B_1 выбираются на лучах BC и AC так, чтобы $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2 . Докажите, что все такие прямые C_1C_2 проходят через одну и ту же фиксированную точку.
8. Внутри треугольника ABC отмечены точки X , Y и Z так, что $\angle BAZ = \angle CA Y$, $\angle CBX = \angle ABZ$ и $\angle A\check{N}Y = \angle BCX$. Докажите, что в одной точке пересекаются прямые:
- а) AX , BY и CZ ; б) $X'Z$, XZ и AC (X' и Z' – точки, изогонально сопряженные точкам X и Z относительно ABC).
9. Из вершин A и C треугольника ABC опущены перпендикуляры AA_1 и CC_1 на прямую, содержащую внешнюю биссектрису угла при вершине B . Докажите, что AC_1 и CA_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC .
10. а) (Short List IMO, 2007) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ (P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно CD). Докажите, что $\angle A\hat{Q}D = \angle DAQ$.
- б) (Всероссийская олимпиада по математике, 2012, региональный тур) В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD отмечена точка S , диаметрально противоположная точке O . Докажите, что $\angle A\hat{S}C = \angle ASD$.
11. В треугольнике ABC отмечены две пары изогонально сопряженных точек: X и X' , Y и Y' . Z – точка пересечения XY и $X'Y'$, Z' – точка пересечения $X'Y$ и XY' . Докажите, что Z и Z' – также изогонально сопряженные.