

Теорема Брианшона, ее связь с теоремой Паскаля.

Вырожденные случаи теорем Паскаля и Брианшона и сопутствующие факты

Рассмотрим еще одну теорему, лежащую на стыке евклидовой и проективной геометрий, которая называется **теоремой Брианшона**.

Теорема. В описанном шестиугольнике три главные диагонали пересекаются в одной точке.

Доказательство. Пусть шестиугольник $ABCDEF$ описан около окружности. Обозначим точки касания через R, Q, T, S, P и U (см. рис. 1). Выберем произвольное положительное число a и построим на прямых BC и EF точки Q' и P' соответственно так, чтобы $PP' = QQ' = a$ и построенные точки лежали в одной полуплоскости относительно прямой PQ . Затем построим окружность ω_1 , касающуюся выбранных прямых в точках Q' и P' . Аналогичным образом построим еще две пары точек: R' и S' ; T и U (на расстоянии a от точек R и S ; T и U) и две соответствующие им окружности ω_2 и ω_3 .

Докажем, что прямая BE является радикальной осью окружностей ω_1 и ω_2 . Действительно, $BQ' = QQ' - BQ = RR' - BR = BR'$ и $EP' = EP + PP' = ES + SS' = ES'$. Аналогично доказывается, что CF – радикальная ось окружностей ω_1 и ω_3 , а AD – радикальная ось ω_2 и ω_3 .

Поскольку радикальные оси трех окружностей пересекаются в одной точке (если центры этих окружностей не лежат на одной прямой), то прямые AD, BE и CF пересекаются в одной точке (**конкурентны**).

Теорема Брианшона справедлива не только для окружности, но и для любого конического сечения. Справедлива и теорема, ей обратная, которая уже целиком относится к проективной геометрии: **если три диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке, то его стороны касаются некоторого конического сечения**.

Вспомним теперь **принцип двойственности в геометрии**, который вытекает из **полярного соответствия относительно окружности с центром O** . Напомню, что полярное соответствие является взаимно однозначным отображением плоскости с выколотой точкой O на себя, то есть каждой точке, кроме O , соответствует прямая (ее поляр), а каждой прямой, не проходящей через точку O – точка (ее полюс). Взаимная однозначность этого соответствия следует из **закона взаимности**: если полярка точки A проходит через точку B , то полярка точки B проходит через точку A .

Сам принцип двойственности состоит в следующем: **для любой конфигурации из точек и прямых, в которой определенные точки лежат на определенных прямых, существует двойственная ей конфигурация из прямых и точек, в которой определенные прямые проходят через определенные точки**.

Таким образом, для любого утверждения, связанного с такой конфигурацией, существует ему двойственное, получаемое автоматической заменой слов:

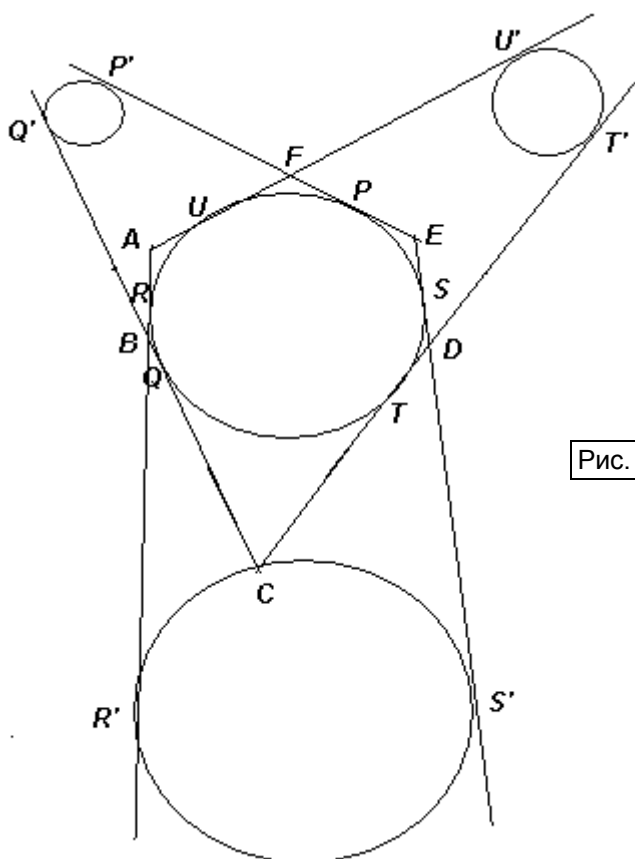


Рис. 1

точка	прямая
полюс	полярка

лежит на	проходит через
коллинеарные точки	конкурентные прямые
трех вершинник (треугольник)	трех сторонник (треугольник)
точка окружности	касательная к окружности в этой точке
....	...

При этом одно из утверждений верно тогда и только тогда, когда верно другое. Классический пример двойственных теорем: Менелая и Чебы. Действительно, в теореме Менелая утверждается, что три точки, лежащие на сторонах треугольника, коллинеарны тогда и только тогда, когда выполняется некоторое равенство, а в теореме Чебы – что три прямые, проходящие через вершины треугольника, конкурентны тогда и только тогда, когда выполняется аналогичное равенство.

А вот, казалось бы, контрпример: через любые две различные точки проходит единственная прямая. Постройте двойственное утверждение [Любые две различные прямые пересекаются в одной точке]. Понятно, что это не так. Почему?

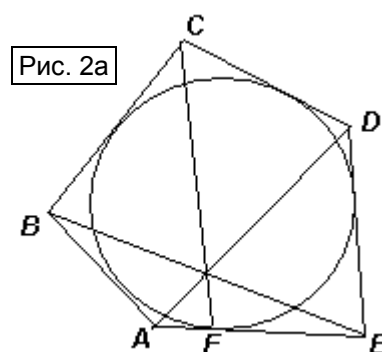
Если мы хотим задействовать параллельные прямые, то должны рассматривать проективную плоскость, на которой они пересекаются в бесконечно удаленной точке. При этом, на проективной плоскости полярной точки O является бесконечно удаленная прямая, а полюсом прямых, проходящих через точку O , являются точки этой прямой. Тем самым обеспечивается взаимная однозначность полярного соответствия и на проективной плоскости.

Теоремы Паскаля и Брианшона являются проективно двойственными, то есть, если в теореме Паскаля заменить точки, лежащие на окружности, на прямые, касающиеся окружности, то коллинеарность точек пересечения трех пар прямых заменяется конкурентностью трех прямых, проходящих через три пары точек. Условно это можно выразить в таблице:

Теорема Паскаля	Теорема Брианшона
$\{A, B, C, D, E, F\} \subset \omega$	a, b, c, d, e, f – касательные к ω
Три точки: $(AB) \cap (DE)$, $(BC) \cap (EF)$ и $(CD) \cap (FA)$ лежат на одной прямой	Три прямые: $a \cap b - d \cap e$, $b \cap c - e \cap f$ и $c \cap d - f \cap a$ проходят через одну точку

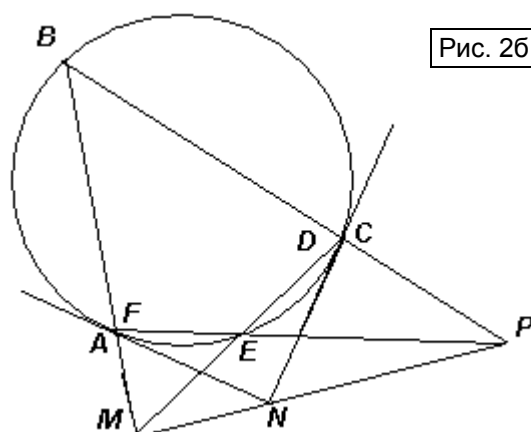
И последнее. Из теорем Паскаля и Брианшона можно получать верные утверждения для пятиугольников, четырехугольников и треугольников, если рассматривать их как вырожденные шестиугольники.

Пример 1. Пусть в теореме Брианшона совпали две стороны описанного шестиугольника $ABCDEF$: EF и FA . Это означает, что точка F становится точкой касания окружности и EA (см. рис. 2а).



Конкурентность AD , BE и CF означает, что **прямые, соединяющие концы не соседних сторон описанного пятиугольника и прямая, проходящая через пятую вершину и точку касания противоположной стороны с окружностью, пересекаются в одной точке.**

Пример 2. Пусть в теореме Паскаля совпали две пары вершин вписанного шестиугольника $ABCDEF$: F и A ; C и D (см. рис. 2б).



Тогда, **во вписанном четырехугольнике ABCE точки M и P попарного пересечения противоположных сторон и точка N пересечения касательных, проведенных в вершинах A и C, лежат на одной прямой.**

Какая еще точка лежит на этой же прямой?

[Точка пересечения касательных, проведенных в вершинах B и E (изобразить)]

Предлагаемые вам задачи разделены на две группы: 1) применение теоремы Брианшона и частных случаев теорем Паскаля и Брианшона; 2) доказательство фактов, связанных со схожими конфигурациями.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Объясните, как получить следствия теорем Брианшона и Паскаля для треугольников, и сформулируйте эти утверждения.
2. Четырехугольник $ABCD$ – описанный, E, F, P и Q – точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно. Докажите, что: а) точки пересечения прямых AF и CE, AP и CQ лежат на прямой BD ; б) диагонали четырехугольников $ABCD$ и $EFPQ$ пересекаются в одной и той же точке.
3. а) Объясните, как получить следствие теоремы Паскаля для пятиугольника, и сформулируйте это утверждение.
б) Объясните, как построить касательную к окружности в данной ее точке, пользуясь только линейкой.
4. Докажите теорему Брианшона с помощью выхода в пространство.
5. В выпуклом шестиугольнике $ABCDEF$: $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ и $\angle A = \angle C = \angle E$. Докажите, что главные диагонали шестиугольника пересекаются в одной точке.
6. (**Прямая Гаусса**) а) Докажите, что если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.
б) Докажите, что на этой же прямой лежит точка пересечения средних линий четырехугольника.
7. (**Теорема Ньютона**) Докажите, что во всяком описанном четырехугольнике середины диагоналей и центр вписанной окружности лежат на одной прямой.
8. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности с центром I . Точки M и N – середины диагоналей AC и BD соответственно. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ – вписанный тогда и только тогда, когда $IM : AC = IN : BD$.
9. На сторонах BC и AD четырехугольника $ABCD$ отмечены точки E и F соответственно. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K, DE и CF – в точке L , а диагонали AC и BD – в точке N . а) Докажите, что точки K, L и N лежат на одной прямой. б) Сформулируйте **теорему Паппа**, обобщив утверждение пункта а). в) Сформулируйте утверждение, **двойственное теореме Паппа** и обоснуйте его.