05.12.17

Аффинная геометрия

Вспомним, каким образом в курсе стереометрии определяется ***параллельное проектирование***.

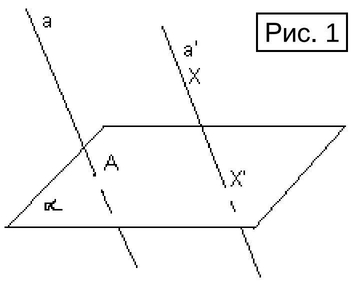

Рис. 1

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее в точке *A* прямая *a* (см. рис. 1). Тогда ***параллельной проекцией точки X на плоскость α в направлении прямой a называется:*** 1) точка *A*, если $X \in a$; 2) точка *X*' пересечения с α прямой *a*', параллельной *a* и проходящей через *X*, если $X \notin a$.

Преобразование пространства, которое каждой его точке ставит в соответствие ее параллельную проекцию называется параллельным проектированием.

Далее доказываются три основных свойства параллельного проектирования для прямых, не параллельных проектирующей прямой. Вспомним их формулировки:

1) Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.

2) Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.

3) При параллельном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой.

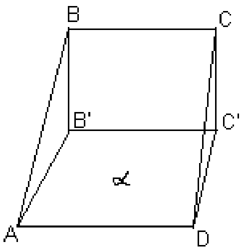

Рис. 2а

Каковы область определения и множество значений параллельного проектирования? [***Отображается пространство на плоскость***]

Если сузить область определения такого отображения и рассматривать проектирование плоскости на плоскость, то эти свойства, очевидно, сохранятся. Кроме того, существует еще одно важное свойство параллельного проектирования, которое доказывается чуть позже в курсе стереометрии (после того, как введено определение угла между плоскостями). Но, рассматривая ***ортогональное проектирование*** (как частный случай параллельного), на примере проектирования прямоугольника *ABCD* на плоскость α, содержащую сторону *AD*, несложно получить, что $\frac{S_{AB'C'D}}{S_{ABCD}} = \cos\angle BAB'$ (см. рис. 2а). Впоследствии в курсе стереометрии будет доказано, что для любых плоских фигур отношение площадей ортогональной проекции фигуры и самой фигуры равно косинусу угла между плоскостями, в которых лежат эти фигуры. Это, в свою очередь, позволяет обосновать еще одно важное свойство параллельного проектирования.

4) Параллельное проектирование плоскости на плоскость сохраняет отношение площадей фигур.

Пусть фигура *F*, лежащая в плоскости α, проектируется в направлении прямой *l* на плоскость α' и ее образом является фигура *F*' (см. рис. 2б). Проведем тогда плоскость β, перпендикулярную прямой *l* и рассмотрим ортогональные проекции фигур *F* и *F*' на плоскость β. Эти проекции совпадут, поэтому $S_F \cdot \cos\angle(\alpha;\beta) = S_{F'} \cdot \cos\angle(\alpha';\beta)$.

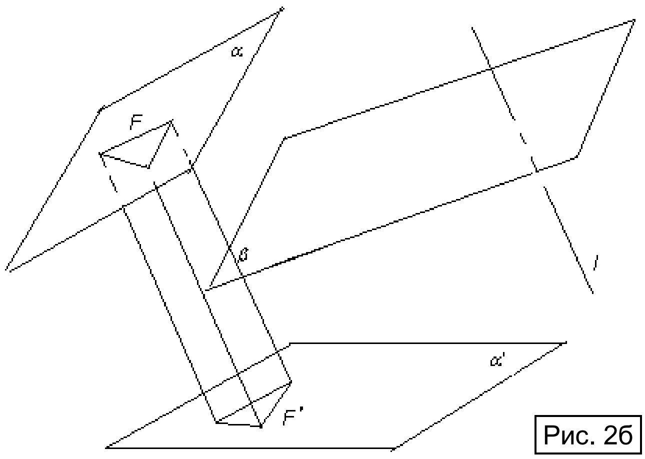

Рис. 2б

Следовательно, $\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{\cos\angle(\alpha';\beta)}{\cos\angle(\alpha;\beta)}$. Для любой другой фигуры *Ф*, лежащей в плоскости α, отношение $\frac{S_\Phi}{S_{\Phi'}}$ будет таким же, значит, $\frac{S_\Phi}{S_F} = \frac{S_{\Phi'}}{S_{F'}}$, что и требовалось.

Заметим теперь, что рассмотренные свойства сохранятся и для композиции нескольких параллельных проектирований. ***Параллельное проектирование плоскости на плоскость, а также композиции таких отображений называются***

аффинными отображениями. В частности, можно рассмотреть аффинное отображение плоскости на себя или, иначе говоря, ***аффинное преобразование плоскости***. Оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования. Если рассматривать сохранение прямолинейности, взаимного расположения точек на прямой, параллельности и длин параллельных отрезков, а также отношения площадей фигур как основные ***инварианты аффинных преобразований плоскости***, то теория таких инвариантов и называется ***аффинной геометрией***.

Свойство фигуры относится к аффинной геометрии (и называется ***аффинным***), если оно не изменяется при любом аффинном преобразовании. Фигура называется аффинной, если в ее определении присутствуют только аффинные инварианты. Например, ***аффинными фигурами*** являются параллелограмм, трапеция, многоугольник (треугольник). Частные случаи треугольников и параллелограммов не являются аффинными фигурами, так как требуют равенства непараллельных отрезков или равенства углов (и то, и другое не является аффинным инвариантом). Окружность – также не аффинная фигура, так как ее проекцией является эллипс (а эллипс – аффинная фигура!). Можно выделить также теоремы, справедливые в аффинной геометрии, например: теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках, теоремы о средней линии треугольника и трапеции, теорема о точке пересечения медиан треугольника, теорема о точке пересечения диагоналей параллелограмма, теорема Менелая, и пр.

По аналогии с равными и подобными фигурами определяется понятие аффинно эквивалентных фигур. ***Две фигуры называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из этих фигур в другую.*** Например: 1) правильный треугольник аффинно эквивалентен любому треугольнику (для любых двух треугольников существует параллельное проектирование, при котором один из треугольников отображается в другой); 2) квадрат, ромб или прямоугольник аффинно эквивалентны любому параллелограмму; 3) любые трапеции с одинаковым отношением оснований аффинно эквивалентны.

Как решать геометрические задачи с помощью аффинных преобразований? Во-первых, этот метод применим ***только*** к решению таких задач, в которых используются ***только аффинные свойства фигур***. С помощью аффинных преобразований, задача сводится к более простой за счет замены данной фигуры на ей аффинно эквивалентную, для которой решение осуществить проще. Полученный результат остается справедлив и для исходной фигуры (в силу аффинной эквивалентности фигур).

Пример 1. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию *ABCD*, которая аффинно эквивалентна произвольной (см. рис. 3а). Прямая, проходящая через точку *E* пересечения диагоналей и точку *F* пересечения продолжений боковых сторон является осью симметрии этой трапеции, поэтому, она проходит через середины оснований. Следовательно, это верно и для произвольной трапеции.

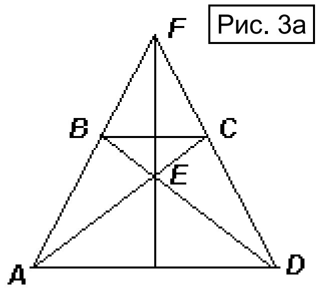

Рис. 3а

Какие способы доказательства этого факта вам были известны ранее? [С помощью ***гомотетии*** и с помощью ***векторов***] И это не случайно!

1) Легко проверить, что любое ***преобразование подобия*** (в том числе все виды движений и гомотетия) ***является частным случаем аффинных преобразований***.

2) При изучении векторов на плоскости рассматривается аффинная (косоугольная) система координат. Как она задается? [Двумя неколлинеарными векторами с общим началом, которые назывались ***базисными***] Любой вектор в такой системе координат единственным образом выражается через базис с помощью ***линейных*** операций: ***сложения векторов, их вычитания и умножения вектора на число***. В отличие от декартовой системы координат, аффинная не требует ***метрики***, то есть угол между осями координат не фиксируется. Поэтому, задачи, связанные с ***коллинеарностью***

точек и с отношением длин отрезков, лежащих на одной прямой, часто решаются с помощью линейных операций над векторами.

Пример 2. Найдите площадь овала, ограниченного эллипсом с полуосями длины a и b.

Решение. Пусть O – центр симметрии эллипса. Построим прямоугольник с тем же центром симметрии, сторонами, параллельными полуосям эллипса и касательными к нему (см. рис. 3б). Полученная фигура аффинно эквивалентна квадрату, стороны которого касаются круга. При таком аффинном преобразовании сохраняется отношение площади овала к площади прямоугольника, то есть $\frac{S_{ов.}}{2a\cdot 2b}=\frac{S_{кр.}}{4r^2}=\frac{\pi}{4}$. Следовательно, $S_{ов.}=\pi ab$.

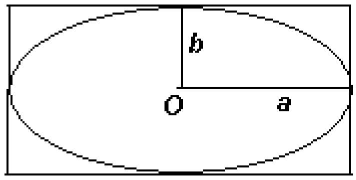

Рис. 3б

Ответ: $S_{ов.}=\pi ab$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, в котором: а) каждая диагональ параллельна противолежащей стороне; б) точки попарного пересечения диагоналей образуют пятиугольник, подобный данному?

2. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, соответственно параллельные CD и AB. Докажите, что: а) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований; б) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.

3. В параллелограмме $ABCD$ прямая, параллельная AB, пересекает сторону BC и диагональ AC в точках N и K соответственно. Докажите, что треугольники ADK и ABN равновелики.

4. Через точку P, лежащую внутри треугольника ABC, проведены три прямые, параллельные сторонам AB, BC и CA и пересекающие стороны BC, AC и AB соответственно в точках A', B' и C'. Докажите, что $\frac{PA'}{AB}+\frac{PB'}{BC}+\frac{PC'}{CA}=1$.

5. Точки M и N – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P. Найдите, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.

6. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части и проведены все чевианы, соединяющие вершины с точками деления на противолежащей стороне. Докажите, что в шестиугольнике, образованном этими прямыми, большие диагонали пересекаются в одной точке.

7. Точки K, N и P расположены на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC соответственно так, что $\frac{AK}{KB}=\frac{BN}{NC}=\frac{CP}{PA}$. Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников: а) ABC и KNP; б) ABC и треугольника, образованного прямыми AN, BP и CK.

8. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC выбраны точки K, N и P. Точки K', N' и P': а) симметричны точкам K, N и P относительно середин этих сторон; б) лежат на сторонах треугольника ABC так, что $KK' \parallel BC$, $NN' \parallel CA$ и $PP' \parallel AB$. Докажите, что треугольники KNP и $K'N'P'$ равновелики.

9. Дан треугольник ABC и прямая l, пересекающая BC, CA и AB в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Точка A' – середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на прямые AB и AC. Аналогично определяются точки B' и C'. Докажите, что: а) A', B' и C' лежат на некоторой прямой l'; б) если l проходит через центр описанной окружности треугольника ABC, то l' проходит через центр его окружности девяти точек.