

### Полярное соответствие

Пусть на плоскости зафиксирована окружность  $\omega$  с центром  $O$  радиуса  $R$ . Напомню, что **точки  $A$  и  $A'$  (отличные от  $O$ ) называются симметричными относительно  $\omega$ , если  $A'$  лежит на луче  $OA$  и  $OA \cdot OA' = R^2$**  (см. рис. 1). Эти точки являются **инверсными**.

Введем новое понятие.

**Определения.** 1) Для каждой точки  $A$  плоскости, отличной от  $O$ , через точку  $A'$ , симметричную ей относительно  $\omega$ , проведем прямую  $a$ , перпендикулярную  $OA'$ . Тогда прямая  $a$  называется **полярной** точки  $A$ , а точка  $A$  – **полюсом** прямой  $a$  (см. рис. 1 – дополнить).

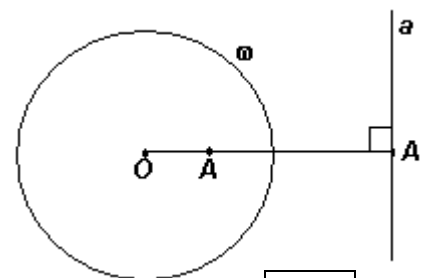


Рис. 1

2) Соответствие  $\{A\} \leftrightarrow \{a\}$  является взаимно-однозначным соответствием между точками, не совпадающими с  $O$ , и прямыми, не проходящими через  $O$ , и оно называется **полярным соответствием**.

Условимся обозначать точки, не совпадающие с  $O$  (полюсы), большими латинскими буквами, а прямые, не проходящие через  $O$  (поляры), соответствующими маленькими буквами. Само полярное соответствие будем обозначать знаком « $\leftrightarrow$ ».

Если считать, что точке  $O$  соответствует бесконечно удаленная прямая, а прямым, проходящим через  $O$ , соответствуют бесконечно удаленные точки, то можно рассматривать полярное соответствие на **проективной плоскости**.

Это обычная плоскость, дополненная бесконечно удаленными точками, которые можно считать точками пересечения параллельных прямых. Все бесконечно удаленные точки лежат на бесконечно удаленной прямой.

Из определения понятно, что для доказательства **простейших свойств полярного соответствия** нам потребуется вспомнить некоторые свойства **инверсии**.

1) Построение образа точки  $A$ , лежащей вне окружности инверсии.

2) Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии.

### Простейшие свойства полярного соответствия

1. а) Пусть точка  $A$  расположена вне окружности  $\omega$ . Проведем из  $A$  касательные  $AM$  и  $AN$ . Тогда  $MN$  – полярная точка  $A$ .

Следует из основного способа построения точки  $A'$  для этого случая.

б) Если  $A \in \omega$ , то  $a$  – касательная к  $\omega$ , проведенная в точке  $A$ .

Следует из того, что  $A' \equiv A$ .

в) Один из углов между полярами точек  $A$  и  $B$  равен углу  $AOB$ .

Угол между прямыми, соответственно перпендикулярными двум данным.

г) Полярная  $a$  точки  $A$  относительно  $\omega$  является радикальной осью двух окружностей:  $\omega$  и окружности  $\alpha$  с диаметром  $OA$ .

Следует из 1 а, б и свойства 2) инверсии (см. рис. 2).

д) Полярной точки  $A$  относительно окружности  $(O; R)$  является множество таких точек  $X$ , что  $\overline{OA} \cdot \overline{OX} = R^2$ .

Следует из 1г и свойства 2 инверсии: геометрическое место образов точек прямой  $a$  при инверсии относительно  $\omega$  есть окружность с диаметром  $OA$  (см. рис. 2). Этот факт иногда используется в качестве определения поляры.

2. (Двойственность) а)  $A \in b \leftrightarrow B \in a$ .

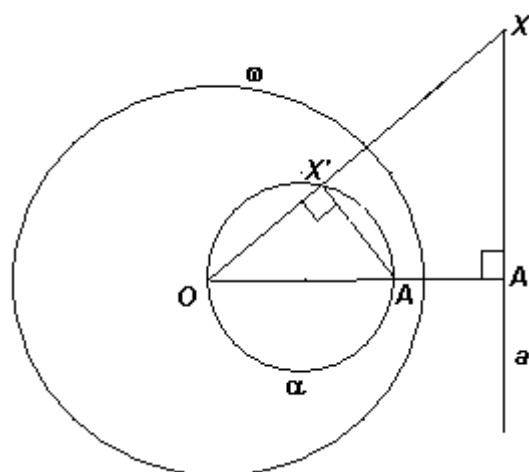


Рис. 2

Следует из 1д.

б) Пусть  $O$ ,  $A$  и  $B$  не лежат на одной прямой, тогда  $C = a \cap b \leftrightarrow AB$ .

Следует из 2а (поляра точки  $C$  проходит через точки  $A$  и  $B$ , поэтому совпадает с  $AB$ ).

в) Точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда  $a$ ,  $b$  и  $c$  проходят через одну точку или параллельны.

1) Параллельность  $\Leftrightarrow O$  лежит на той же прямой. 2) (Следует из 2а)  $a \cap b \leftrightarrow AB$ ,  $a \cap c \leftrightarrow AC$ . Тогда  $AB \equiv AC \Leftrightarrow a \cap b \equiv a \cap c$ .

На занятии «Симедиана\_2» мы встретились с понятием **гармонического четырехугольника**. Напомню, что четырехугольник  $ABCD$  называется гармоническим, если  $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ . Это понятие можно обобщить для любого расположения точек  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ . В частности, если они лежат на одной прямой, то их называют **гармонической четверкой точек**. Один из примеров такой четверки – две вершины треугольника и основания внутренней и внешней биссектрис, проведенных к стороне с концами в этих вершинах (изобразить).

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Даны окружность  $\omega$  и прямая  $l$ , не имеющие общих точек. Из каждой точки  $P$ , лежащей на прямой  $l$ , проводятся касательные  $PA$  и  $PB$  к окружности  $\omega$ . Докажите, что все хорды  $AB$  имеют общую точку.

2. (**Гармоническая четверка**) а) Точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  лежат на одной прямой и образуют гармоническую четверку ( $AB \cdot CD = BC \cdot AD$ ). Докажите, что точка  $D$  лежит на поляре точки  $B$  относительно любой окружности, проходящей через  $A$  и  $C$ .

3. (**Основное свойство полярного соответствия**) Через точку  $A$ , лежащую вне окружности  $\omega$ , проведены к ней две секущие  $m$  и  $l$ , которые пересекают  $\omega$  в точках  $M_1$ ,  $M_2$  и  $L_1$ ,  $L_2$  соответственно. Докажите, что прямые  $M_1L_1$  и  $M_2L_2$  пересекаются на поляре точки  $A$  или параллельны ей.

4. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $T$ , а продолжения его противоположных сторон пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что:

а) точки  $P$  и  $Q$  лежат на поляре точки  $T$ .

б) четверка точек  $P$ ,  $Q$ ,  $T$  и  $O$  (центр окружности) – ортоцентрическая (любая из этих точек является ортоцентром треугольника с вершинами в трех других точках).

5. Объясните, каким образом, используя только линейку без делений, построить:

а) поляру точки, не лежащей на данной окружности  $\omega$ ;

б) касательную к данной окружности  $\omega$ , проходящую через заданную точку  $M$ ,

в) перпендикуляр из данной точки  $P$ , лежащей на полуокружности с данным диаметром  $AB$ , к этому диаметру.

6. а) (**Симметричная бабочка**) Дана точка  $A$  на диаметре  $BC$  полуокружности  $\omega$ . Точки  $X$  и  $Y$ , лежащие на  $\omega$ , таковы, что  $\angle XAB = \angle YAC$ . Докажите, что все прямые  $XY$  проходят через одну и ту же точку, либо параллельны.

б) Объясните, каким образом из утверждения задачи 6а можно получить решение **основной задачи о симедиане**: «Касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведенные через точки  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $P$ . Тогда  $AP$  – симедиана треугольника  $ABC$ ».

7. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Известно, что касательные к  $\omega$ , проведенные в точках  $A$  и  $C$ , пересекаются на прямой  $BD$  или параллельны  $BD$ . Докажите, что: а) касательные к  $\omega$ , проведенные в точках  $B$  и  $D$ , пересекаются на прямой  $AC$  или параллельны  $AC$ .

б) условие пункта а) равносильно тому, что  $ABCD$  – гармонический четырехугольник.

8. Четырехугольник  $ABCD$  описан около окружности  $\omega$ .  $K, L, M$  и  $N$  – точки касания  $\omega$  со сторонами  $AB, BC, CD$  и  $DA$  соответственно. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  пересекаются в точке  $R$ , продолжения сторон  $BC$  и  $DA$  – в точке  $Q$ , продолжения  $KL$  и  $MN$  – в точке  $S$ , продолжения  $LM$  и  $NK$  – в точке  $T$ . Докажите, что: а) точки  $Q, R, S$  и  $T$  лежат на одной прямой; б) прямые  $AC, BD, KM$  и  $LN$  пересекаются в одной точке.
9. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$  с центром  $O$ . Его диагонали пересекаются в точке  $T$ , а лучи  $AB$  и  $DC$  – в точке  $P$ . Описанные окружности треугольников  $PAD$  и  $PBC$  вторично пересекаются в точке  $M$ . Докажите, что точки  $O, T$  и  $M$  лежат на одной прямой.
10. Пусть  $AL$  и  $AK$  – внутренняя и внешняя биссектрисы треугольника  $ABC$ ,  $P$  – точка пересечения касательных к описанной окружности в точках  $B$  и  $C$ . Перпендикуляр, восстановленный из точки  $L$  к  $BC$ , пересекает прямую  $AP$  в точке  $Q$ . Докажите, что  $Q$  лежит на средней линии треугольника  $LKP$ .