

Разнойбой_10

Сегодня вам предлагается подборка задач разной тематики в качестве тренировки. Большинство из них так или иначе связано с ранее изученными темами занятий. Нумерация задач весьма условна с точки зрения их трудности, поэтому выбирайте задачи, которые нравятся.

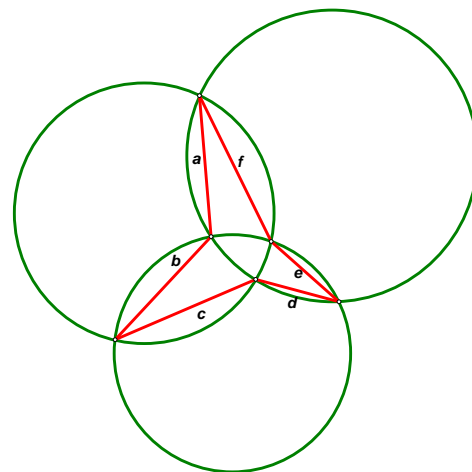
Задачи для самостоятельного решения

1. Выписаны 9 чисел – длины биссектрис, высот и медиан некоторого треугольника. Известно, что среди этих чисел не более четырех различных. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.

2. Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника $ABCDEF$ меньше 1. Может ли длина каждой из диагоналей AD , BE и CF быть не меньше двух?

3. (Теорема Харуки) Даны три попарно пересекающиеся окружности, в которых последовательно соединены точки их попарного пересечения. Длины получившихся хорд равны a , b , c ,

d , e и f (см. рисунок). Докажите, что $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} = 1$.



4. Дан треугольник ABC . Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AMB , BMC и CMA , равны.

5. В треугольнике ABC отмечены точки касания двух внеписанных окружностей со сторонами AC и BC – точки B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков AB и A_1B_1 , делит периметр треугольника ABC пополам.

6. Около остроугольного треугольника ABC описана окружность, AN – ее диаметр. На сторонах AC и AB отмечены точки D и E соответственно так, что $\angle BNE = \angle CND$. Прямые DE и BC пересекаются в точке F , K – середина отрезка DE . Окружность, описанная около треугольника ADE , вторично пересекает данную окружность в точке X . Докажите, что угол KXF – прямой.

7. Даны две пересекающиеся окружности. Через одну из их общих точек A проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают данные окружности в точках B и C . Найдите геометрическое место точек M таких, что $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{AC}$.

8. В остроугольном треугольнике ABC D – середина стороны AC , H – ортоцентр (точка пересечения высот). Прямая, проходящая через точку H перпендикулярно отрезку DH , пересекает стороны AB и BC в точках E и F . Докажите, что $HE = HF$.

9. Треугольник ABC вписан в окружность и еще проведена окружность через середины его сторон. Рассмотрим третью окружность, которая касается описанной окружности в точке A и касается второй окружности внешним образом в точке A_1 . Аналогично определяются точки B_1 и C_1 . Докажите, что прямые AA_1 , BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.