

### Полувписанная окружность

Использованы материалы занятий П.А. Кожевникова (см. <http://geometry.ru/persons/kozhevnikov/poluvpis.pdf>) и работа А. Гаркавого (см. <https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works/garkavyi.pdf>).

Пусть в окружность  $\omega$  вписан треугольник  $ABC$ . Рассмотрим окружность  $\omega_1$ , касающуюся сторон  $AB$  и  $AC$  и окружности  $\omega$  в точке  $T$  (см. рис. 1). **Такую окружность будем называть полувписанной для треугольника  $ABC$ .**

Докажите, что такая окружность существует для любого треугольника  $ABC$ . [Пусть точка  $Z$  движется по биссектрисе угла  $A$ , тогда она равноудалена от  $AB$  и  $AC$  и найдется такое ее положение (из соображений непрерывности), при котором это расстояние будет равно расстоянию от  $Z$  до  $\omega$ ]

Сколько полувписанных окружностей у любого треугольника? [3]

Свойства этой конструкции вы изучите в процессе решения задач. Полезно предварительно вспомнить два факта.

1) **Основная задача о симедиане.** Пусть касательные к описанной окружности треугольника  $ABC$ , проведенные в точках  $B$  и  $C$ , пересекаются в точке  $X$ . Тогда  $AX$  – симедиана треугольника  $ABC$ .

2) Что является композицией двух произвольных гомотетий? [**Гомотетия** или **параллельный перенос**] Второй случай нас пока не интересует. Пусть  $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2} = H_O^k$ .

Что можно сказать о значении  $k$  и о положении точки  $O$ ? [ $k = k_1 k_2$ ,  $O \in O_1 O_2$ ].

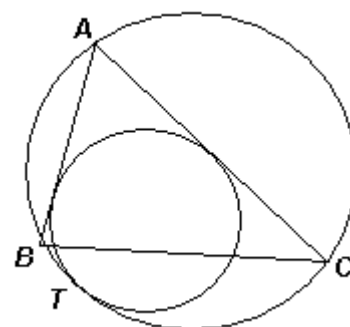


Рис. 1

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Треугольник  $ABC$  вписан в окружность  $\omega$ . Окружность  $\omega_1$  касается сторон  $AB$  и  $AC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно и дуги  $BC$  в точке  $T_A$ . Лучи  $T_A K$  и  $T_A L$  пересекают окружность  $\omega$  в точках  $C'$  и  $B'$  соответственно. Точка  $W$  – середина дуги  $BC$ , не содержащей точку  $T_A$ ,  $E$  – точка, диаметрально противоположная  $W$ ,  $I$  – центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Докажите, что:

- 1) прямая  $B'C'$  – серединный перпендикуляр к отрезку  $AI$ ;
- 2) прямая  $T_A A$  содержит симедиану треугольника  $B'C'T_A$ ;
- 3) прямая  $T_A W$  содержит медиану треугольника  $B'C'T_A$ ;
- 4) точка  $I$  лежит на прямой  $T_A W$ ;
- 5) точки  $T_A, B, K$  и  $I$  (а также точки  $T_A, C, L$  и  $I$ ) лежат на одной окружности;
- 6) прямые  $CC'$  и  $BB'$  являются касательными к этим окружностям;
- 7) (лемма Варьера) точка  $I$  – середина отрезка  $KL$ ;
- 8) прямая  $B'C'$  содержит среднюю линию треугольника  $KAL$ ;
- 9) прямая  $KL$  – касательная к окружностям, описанным около треугольников  $B'IC$  и  $T_A IE$ ;
- 10) радиус  $r_1$  окружности  $\omega_1$  и радиус  $r$  вписанной окружности связаны соотношением:
 
$$\frac{r}{r_1} = \cos^2 \frac{\angle BAC}{2};$$
- 11) прямые  $AT_A, BT_B$  и  $CT_C$ , где  $T_B$  и  $T_C$  – точки касания двух других полувписанных окружностей треугольника  $ABC$  с его описанной окружностью  $\omega$ , пересекаются в одной точке и объясните, что это за точка;
- 12) прямые  $KL, BC$  и  $T_A E$  пересекаются в одной точке или параллельны;
- 13) точка пересечения прямых из пункта 12) и две точки, определяемые аналогично, лежат на одной прямой;
- 14) биссектриса угла  $BAC$  является и биссектрисой угла  $T_A AD$ , где  $D$  – точка касания вневписанной окружности треугольника  $ABC$  со стороной  $BC$ ;

**15)** Пусть перпендикуляр, восстановленный в точке  $B$  к прямой  $AB$ , пересекается с описанной окружностью треугольника  $ABC$  в точке  $U$ , и с биссектрисой угла  $BAC$  в точке  $Z$ . Тогда длина касательной, проведённой из точки  $U$  к полувписанной окружности, равна длине отрезка  $UZ$ .

**16)** Пусть точка  $Q$  – пересечение прямых  $AT_A$  и  $KL$ . Тогда угол  $BQK$  равен углу  $CQL$ .