

Точки Брокера

1. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC . На его сторонах вне треугольника построим треугольники с вершинами A' , B' и C' так, что $\triangle CA'B \sim \triangle CAB' \sim \triangle C'AB \sim \triangle ABC$ (см. рис. 1а). Для удобства, обозначим соответственно равные углы этих треугольников буквами α , β и γ .

1) Докажем, что **окружности, описанные около трех построенных треугольников, пересекаются в одной точке**.

Доказательство. Пусть окружности, описанные около треугольников $CA'B$ и CAB' вторично пересекаются в точке P (изобразить). Тогда $\angle APB = 360^\circ - (\angle APC + \angle BPC) = \gamma + \beta = 180^\circ - \alpha$. Это означает, что точка P лежит на окружности, описанной около треугольника $C'AB$.

2) Докажем, что **в этой же точке пересекаются прямые AA' , BB' и CC'** .

Доказательство. $\angle APA' = \angle APC + \angle CPA' = (180^\circ - \gamma) + \angle CBA' = 180^\circ$, то есть точка P лежит на прямой AA' . Аналогично доказывается, что точка P лежит на прямых AA' и BB' .

3) Докажем, что **$\angle PBA = \angle PAC = \angle PCB$** .

Доказательство. $\angle PBA = \beta - \angle PBC = \beta - \angle PA'C = \beta - (180^\circ - \angle PAC - \alpha - \gamma) = \angle PAC$, что и требовалось. Аналогично доказывается равенство другой пары углов.

Точку P , удовлетворяющую доказанному равенству, **называют первой точкой Брокера треугольника ABC** , а **угол $\varphi = \angle PBA = \angle PAC = \angle PCB$ называют углом Брокера этого треугольника** (обход вершин треугольника в равенстве углов – против часовой стрелки).

Отметим, что доказанные соотношения верны не только для остроугольного треугольника. Чтобы убедиться в этом, достаточно провести аналогичный счет углов, либо в наших доказательствах перейти от обычных углов к углам между прямыми.

Верно ли, что точка P всегда лежит внутри треугольника ABC ? [Да, см. 1)]

Утверждения, доказанные в пунктах 1) и 2) дают **два различных способа построения первой точки Брокера**. Кроме того, из равенства накрест лежащих углов следует, что **$A'B \parallel AC$, $C'A \parallel BC$ и $B'C \parallel AB$** .

2. В процессе решения задач вы докажете, что у любого треугольника есть две точки Брокера. Кроме того, вы вновь встретитесь с понятием **изогонального сопряжения**, а также сможете установить **связь между точками Брокера и точкой Лемуана** и тем самым получить еще один способ построения точек Брокера.

Напомню, что точка Лемуана – это точка пересечения симедиан треугольника. Вам может помочь факт, доказанный на занятии «Симедиана»: **симедиана – геометрическое место таких точек Q , принадлежащих углу A треугольника ABC , для которых расстояния от точки Q до прямых,**

содержащих стороны AB и AC , пропорциональны этим сторонам, то есть $\frac{h_c}{h_b} = \frac{c}{b}$

(см. рис. 1б).

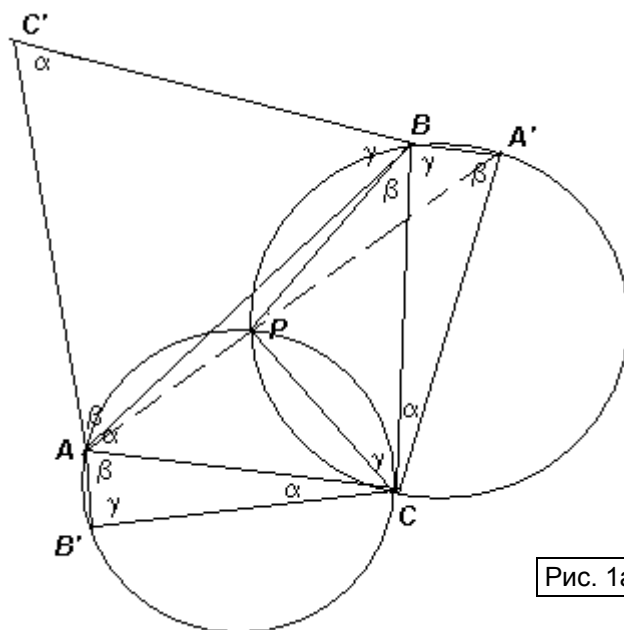


Рис. 1а

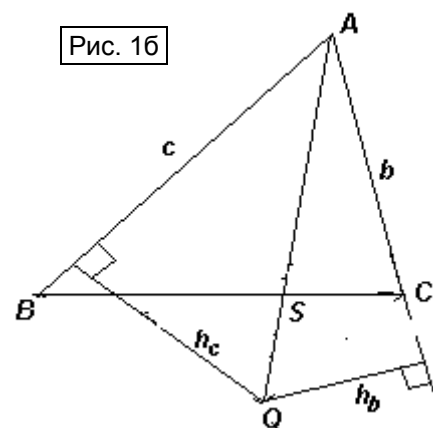


Рис. 1б

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Касательная к описанной окружности треугольника ABC , проходящая через вершину C , пересекает прямую, проходящую через вершину B параллельно прямой AC , в точке A' . Докажите, что $\angle A'AC = \varphi$ (углу Брокара треугольника ABC).
2. Через точку Брокара P треугольника ABC проведены прямые AP , BP и CP , пересекающие окружность, описанную около ABC , в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle B_1C_1A_1$.
3. Докажите, что $\operatorname{ctg}\varphi = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma$, где α , β и γ – углы треугольника, φ – его угол Брокара.
4. Докажите, что: а) в любом треугольнике ABC существует вторая точка Брокара Q (такая, что $\angle QAB = \angle QCA = \angle QBC$); б) углы Брокара для точек P и Q треугольника ABC равны; в) точки P и Q изогонально сопряжены относительно треугольника ABC .
5. а) Докажите, что $\sin^3 \varphi = \sin(\alpha - \varphi)\sin(\beta - \varphi)\sin(\gamma - \varphi)$, где α , β и γ – углы треугольника, φ – его угол Брокара. б) Пусть P – точка Брокара треугольника ABC ; R_1 , R_2 и R_3 – радиусы окружностей, описанных около треугольников ABP , BCP и CAP . Докажите, что $R_1R_2R_3 = R^3$, где R – радиус описанной окружности треугольника ABC .
6. Докажите, что: а) в любом треугольнике угол Брокара $\varphi \leq 30^\circ$; б) для любой точки M , лежащей внутри треугольника ABC , хотя бы один из углов ABM , BCM или CAM не больше, чем 30° .
7. Пусть P и Q – точки Брокара треугольника ABC . Прямые CP и BQ , AP и CQ , BP и AQ пересекаются в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ проходит через точки P и Q .
8. Пусть A' , B' и C' – проекции точки Лемуана треугольника ABC на серединные перпендикуляры к сторонам BC , AC и AB соответственно. Докажите, что: а) $\triangle CA'B' \sim \triangle CAB'$; б) прямые AB' , BC' и CA' пересекаются в первой точке Брокара P ; в) обе точки Брокара этого треугольника лежат на окружности с диаметром OL и симметричны относительно него (O и L – центр описанной окружности и точка Лемуана треугольника ABC соответственно).
9. Пусть Q – вторая точка Брокара треугольника ABC , O – центр его описанной окружности, A_1 , B_1 и C_1 – центры описанных окружностей треугольников CAQ , ABQ и BCQ соответственно. Докажите, что: а) $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$; б) O – первая точка Брокара треугольника $A_1B_1C_1$.
10. На сторонах CA , AB и BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно так, что $\angle AB_1A_1 = \angle BC_1B_1 = \angle CA_1C_1 = \varphi$. Докажите, что существует поворотная гомотетия, переводящая треугольник $A_1B_1C_1$ в треугольник ABC , причем ее центр совпадает с первой точкой Брокара обоих треугольников.