

Симедиана треугольника_2

Продолжим изучение конструкций, связанных с симедианой треугольника.

1. А) Используя рис. 1, вспомните, два основных вида определения симедианы треугольника.
- Б) Вспомните основное свойство и признак симедианы.
- В) Сформулируйте определения симедианы как геометрического места точек.

Поищем теперь на симедиане «хорошие» точки.

2. Гармонический четырехугольник.

Продлим симедиану до пересечения с описанной окружностью.

Пусть в треугольнике ABC симедиана AS пересекает описанную около него окружность в точке D (см. рис. 2). Тогда $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$.

Доказательство. Так как точка D лежит на симедиане, то

$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB^2}{AC^2}. \text{ С другой стороны, } \frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ACD}} = \frac{AB \cdot DB \cdot \sin \angle ABD}{AC \cdot DC \cdot \sin \angle ACD}.$$

Приравняв правые части и используя, что $\angle ABD + \angle ACD = 180^\circ$, получим искомое равенство.

Верно и обратное утверждение: **если точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC , и $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$, то луч AD содержит симедиану**

треугольника. Доказательство аналогично.

Следствия (см. рис. 3, обоснуйте!).

- 1) Биссектрисы углов BAC и BDC пересекаются на стороне BC .
- 2) Точка D лежит на **окружности Аполлония** треугольника ABC .
- 3) $AB \cdot DC = AC \cdot DB$ (вписанный четырехугольник $ABCD$, для которого выполняется это равенство, называется **гармоническим**)
- 4) Вписанный четырехугольник является **гармоническим** тогда и только тогда, когда каждая его диагональ является **симедианой** треугольников, на которые его разбивает другая диагональ.

3. Основная задача о симедиане.

Продлим симедиану еще дальше. Оказывается, на ней лежит еще одна знакомая точка.

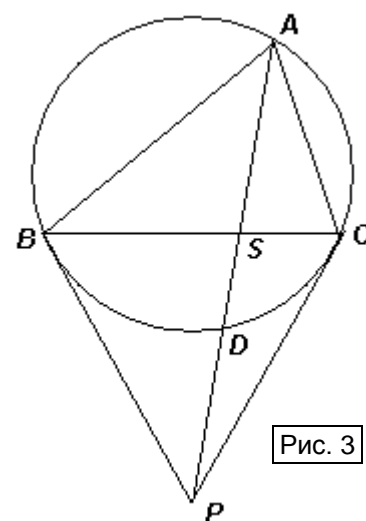
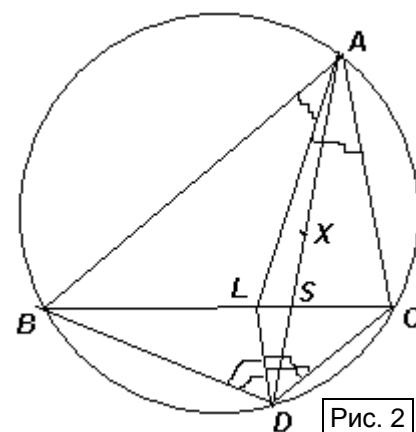
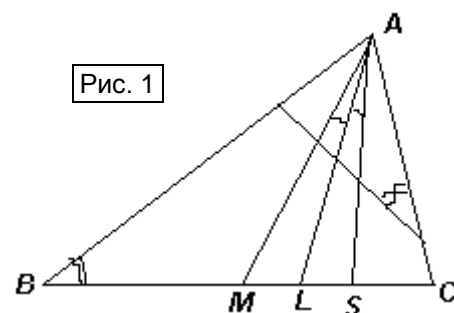
Треугольник ABC вписан в окружность. Пусть касательные к окружности, проведенные в вершинах B и C , пересекаются в точке P . Тогда прямая AP содержит симедиану треугольника ABC .

Это утверждение можно доказывать многими различными способами. Выберем тот, который использует уже доказанное.

Доказательство. Используем равенство угла между касательной и хордой и соответствующего вписанного угла, равенство отрезков касательных PB и PC , теорему синусов в

треугольнике ABC (см. рис. 3): $\frac{S_{\triangle ABP}}{S_{\triangle ACP}} = \frac{AB \cdot PB \cdot \sin \angle ABP}{AC \cdot PC \cdot \sin \angle ACP} =$

$$\frac{AB \cdot \sin \angle ACB}{AC \cdot \sin \angle ABC} = \frac{AB^2}{AC^2}. \text{ Следовательно, } AP \text{ – симедиана треугольника } ABC.$$



Знание рассмотренных фактов позволит вам решить сложные задачи, большинство из которых предлагались на разных этапах Всероссийской олимпиады или на олимпиадах по геометрии.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Дан треугольник ABC и такая точка X внутри него, что $\angle ABX = \angle CAX$ и $\angle BAX = \angle ACX$. Луч AX пересекает BC в точке S . Докажите, что: а) XS – биссектриса треугольника BXC ; б) AS – симедиана треугольника ABC ; в) X – середина отрезка AD , где D – точка пересечения луча AX с описанной окружностью треугольника ABC .
2. Окружность ω_1 проходит через точки A и B и касается прямой AC , а окружность ω_2 проходит через точки A и C и касается прямой AB . Докажите, что общая хорда этих окружностей является симедианой треугольника ABC .
3. В остроугольном треугольнике ABC на высоте BK как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках E и F соответственно. К этой окружности в точках E и F проведены касательные, которые пересекаются в точке P . Докажите, что прямая BP содержит медиану треугольника ABC .
4. Две окружности пересекаются в точках M и K . Из каждой точки A дуги MK одной окружности проводятся лучи AM и AK , пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. Докажите, что медианы всех треугольников ABC , проведенные из вершины A , проходят через одну и ту же точку.
5. Дан треугольник ABC . Касательная в точке C к его описанной окружности пересекает прямую AB в точке D . Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K . Докажите, что прямая DK делит отрезок BC пополам.
6. Биссектрисы внешнего и внутреннего углов при вершине A треугольника ABC пересекают прямую BC в точках D и E . Окружность с диаметром DE пересекает описанную окружность треугольника ABC в точках A и X . Докажите, что AX – симедиана треугольника ABC .
7. В треугольнике ABC проведена биссектриса BD . Прямая BD пересекает окружность ω_1 , описанную около треугольника ABC , в точках B и E . Окружность ω_2 , построенная на отрезке DE как на диаметре, пересекает окружность ω_1 в точках E и F . Докажите, что прямая, симметричная прямой BF относительно прямой BD , содержит медиану треугольника ABC .
8. Из точки A к окружности ω проведена касательная AD и произвольная секущая, пересекающая окружность в точках B и C (B лежит между точками A и C). Докажите, что окружность, проходящая через точки C и D и касающаяся прямой BD , проходит через фиксированную точку (отличную от D).
9. Неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω . Касательная к этой окружности в точке C пересекает прямую AB в точке D . Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC . Прямые AI и BI пересекают биссектрису угла CDB в точках Q и P соответственно. Пусть M – середина отрезка PQ . Докажите, что прямая MI проходит через середину дуги ACB окружности ω .
10. Пусть ABC – остроугольный треугольник, в котором $AC < BC$; M – середина стороны AB . В описанной окружности ω треугольника ABC проведён диаметр CC' . Прямая CM пересекает прямые AC' и BC' в точках K и L соответственно. Перпендикуляр к прямой AC' , проведённый через точку K , перпендикуляр к прямой BC' , проведённый через точку L , и прямая AB образуют треугольник. Докажите, что описанная окружность ω' этого треугольника касается окружности ω .