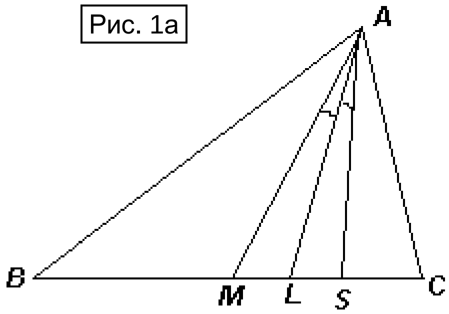
Симедиана треугольника

На двух занятиях подряд мы рассмотрим задачи, связанные с симедианой треугольника.

1. Определение и антипараллельность.

Рассмотрим треугольник *ABC*, его медиану *AM* и его биссектрису *AL* (см. рис. 1а). Пусть луч *AS* симметричен лучу *AM* относительно прямой *AL*, где *S* – точка пересечения этого луча с *BC*. Тогда отрезок *AS* называется ***симедианой*** треугольника *ABC*.

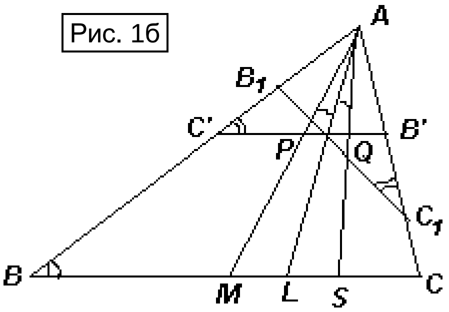
Рис. 1а



Проведем отрезок *C'B'*, параллельный стороне *BC*, с концами на сторонах *AB* и *AC* соответственно (см. рис. 1б). Объясните, почему медиана *AM* треугольника *ABC* делит его пополам. [Гомотетия с центром *A*]

Рассмотрим симметрию относительно биссектрисы *AL*: образом луча *AM* является луч *AS*, а образом отрезка *B'C'* является отрезок B_1C_1, антипараллельный этой стороне (*см. равенство углов, отмеченных двумя дугами*). Точка *Q* пересечения B_1C_1 и *AS* является образом точки *P* пересечения *AM* и *B'C'*. Так как P – середина *B'C'*, то *Q* – середина B_1C_1. Очевидно, что все рассуждения можно провести и в обратную сторону.

Рис. 1б



Таким образом, мы получили утверждение, равносильное определению симедианы: ***отрезок AS (S∈ BC) является симедианой треугольника ABC тогда и только тогда, когда он, пересекая отрезок, антипараллельный BC, делит его пополам***.

Следствие. Медиана треугольника *ABC* – симедиана треугольника *AB'C'*.

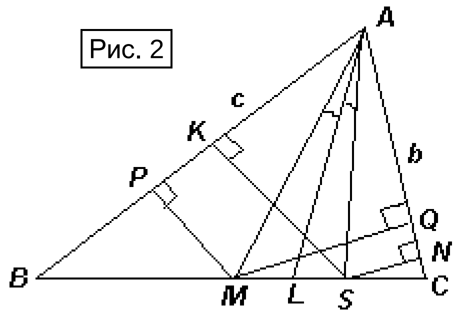
2. Основное свойство и признак симедианы.

Известно, что медиана делит противолежащую сторону и площадь треугольника пополам. А в каком отношении делит эту сторону и площадь треугольника симедиана?

Пусть в треугольнике *ABC*: *AB* = *c*; *AC* = *b*.

Тогда ***AS – симедиана треугольника ABC (S∈BC) тогда и только тогда, когда*** $\frac{BS}{CS}=\frac{c^2}{b^2}$.

Рис. 2



Доказательство. 1) Пусть *AS* – симедиана треугольника *ABC*. Проведем перпендикуляры к сторонам *AB* и *AC*: *MP*, *MQ*, *SK* и *SN* (см. рис. 2). Тогда $\frac{BS}{CS}=\frac{S_{\Delta ABS}}{S_{\Delta ACS}}=\frac{c\cdot SK}{b\cdot SN}$ (*).

Из доказанных равенств пар углов следует подобие двух пар прямоугольных треугольников: $\Delta ASK \sim \Delta AMQ$ и $\Delta ASN \sim \Delta AMP$. Следовательно, $\frac{SK}{MQ}=\frac{AS}{AM}$ и $\frac{SN}{MP}=\frac{AS}{AM}$.

Значит, $\frac{SK}{SN}=\frac{MQ}{MP}=\frac{c}{b}$ (последнее равенство следует из того, что треугольники *ABM* и *ACM* равновелики). Подставив это в равенство (*), получим требуемое соотношение.

2) Пусть выполняется указанное равенство, но *AS* – не симедиана. Тогда проведем симедиану *AS'*, для которой выполняется такое же равенство, и получим, что $S' \equiv S$.

Равенство (*) показывает, что площадь делится симедианой в том же отношении.

Таким образом, и это утверждение эквивалентно определению симедианы.

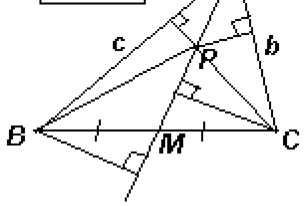
3. Симедиана как геометрическое место точек.

Рассмотрим луч *AM*, содержащий медиану треугольника *ABC* (см. рис. 3а). Сформулируем несколькими способами его характеристику в качестве геометрического места точек.

Луч AM, содержащий медиану треугольника ABC, является геометрическим местом точек P, принадлежащих углу A треугольника ABC, для которых:

1) Расстояния от вершин *B* и *C* до прямой *AP* равны; 2) $S_{\Delta ABP} = S_{\Delta ACP}$; 3) расстояния от точки *P* до прямых, содержащих стороны *AB* и *AC*, обратно пропорциональны этим сторонам.

Рис. 3а

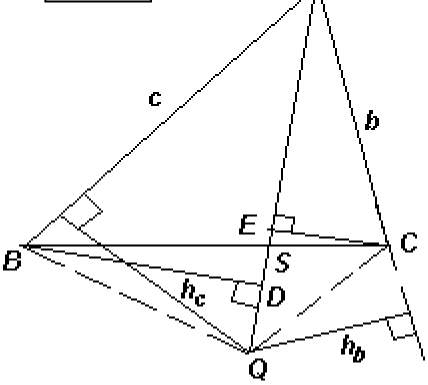


Аналогичными свойствами обладает и симедиана.

Симедиана – геометрическое место таких точек Q, принадлежащих углу A треугольника ABC, для которых:

1) расстояния от вершин *B* и *C* до прямой *AQ* пропорциональны квадратам сторон *c* и *b*; 2) $\dfrac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACQ}} = \dfrac{c^2}{b^2}$; 3) расстояния от точки *Q* до прямых, содержащих стороны *AB* и *AC*, пропорциональны этим сторонам, то есть $\dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{c}{b}$ (см. рис. 3б).

Рис. 3б



Доказательство. Используя, что $\Delta SBD \sim \Delta SCE$ и доказанное в пункте 2, получим: 1) $\dfrac{BD}{CE} = \dfrac{BS}{CS} = \dfrac{c^2}{b^2}$; 2) $\dfrac{S_{\Delta ABQ}}{S_{\Delta ACQ}} = \dfrac{BD}{CE} = \dfrac{c^2}{b^2}$; 3) $\dfrac{ch_c}{bh_b} = \dfrac{c^2}{b^2} \Leftrightarrow$ $\dfrac{h_c}{h_b} = \dfrac{c}{b}$.

Отметим, что в этом пункте мы обобщили понятие симедианы, считая ее лучом. Другие важные свойства симедианы будут рассмотрены на следующем занятии.

Задачи для самостоятельного решения

1. Докажите, что в неравнобедренном треугольнике одна из симедиан совпадает с высотой тогда и только тогда, когда этот треугольник – прямоугольный.

2. В треугольнике *ABC* отрезки *CP* и *BQ* – симедианы. Можно ли утверждать, что треугольник *ABC* – равнобедренный, если: а) *BP* = *CQ*; б) *AP* = *AQ*; в) *PQ* || *BC*?

3. а) В треугольнике *ABC* точка *M* – середина стороны *AC*. Симедиана, проведенная из вершины *B*, пересекает окружность, описанную около треугольника, в точке *D*. Докажите, что прямая *AC* содержит биссектрису угла *BMD*.

á) Восстановите треугольник *ABC* по вершине *B*, центроиду и точке пересечения симедианы, проведенной из *B*, с описанной окружностью.

4. В треугольнике *ABC* с тупым углом *B* проведена средняя линия *MK*, параллельная *BC*. Через вершину *A* проведена касательная к окружности, описанной около этого треугольника, которая пересекает прямую *BC* в точке *D*. Докажите подобие треугольников *ADK* и *CDM*.

5. Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника *ABC* пересекаются в точке *H*. Точка B_0 – середина стороны *AC*. Докажите, что точка пересечения прямых, симметричных BB_0 и HB_0 относительно биссектрис углов *ABC* и *AHC* соответственно, лежит на прямой A_1C_1.

6. Через вершину *A* треугольника *ABC* проведена прямая *a*, параллельная *BC*. Симедиана треугольника, проведенная из вершины *B*, вторично пересекает описанную окружность треугольника в точке *D*. Прямая *CD* пересекает прямую *a* в точке *X*. Докажите, что: а) равны углы *ABC* и *AMX*, где *M* – середина *AC*; б) прямая *AB* является касательной к окружности, описанной около четырехугольника *AMDX*.

7. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC высоты AA' и BB' пересекаются в точке H, а медианы треугольника AHB пересекаются в точке M. Прямая CM делит отрезок $A'B'$ пополам. Найдите угол C.

8. В треугольнике ABC проведена медиана CD. Серединный перпендикуляр к стороне AC пересекает ее в точке M, а серединный перпендикуляр к стороне BC – в точке N. Лучи AM и BN пересекаются в точке P. Докажите, что CP – симедиана треугольника ABC.

9. Точки A', B' и C' – середины сторон BC, CA и AB треугольника ABC соответственно, а BH – его высота. Докажите, что если описанные около треугольников AHC' и CHA' окружности проходят через точку M, отличную от H, то $\angle ABM = \angle CBB'$.

10. Дан неравнобедренный остроугольный треугольник ABC, BB_1 – его симедиана, луч BB_1 вторично пересекает окружность ω, описанную около треугольника, в точке L. Пусть H_A, H_B и H_C – основания высот треугольника ABC, а луч BH_B вторично пересекает ω в точке T. Докажите, что точки H_A, H_C, T и L лежат на одной окружности.