Серия 12. Разнобой.

1. На доске записаны числа $1, 2, \ldots, 2017$, любые 2 числа разрешается заменять на их среднее арифметическое. Какие целые числа могут остаться после 2016 таких операций?

2. В течение года на кружке ЦПМ проходит 60 занятий. На одно из них преподаватели запланировали тему "Комбинаторная геометрия". Дети могут послать преподавателям пачку записок с вопросами, на которые те могут ответить только "да"или "нет". Преподаватели перемешивают записки в пачке и, не оглашая вслух вопросов, честно отвечают на все. Какое наименьшее количество записок нужно заготовить детям, чтобы наверняка узнать, на каком именно по счёту занятии будет эта бесподобная тема?

3. На сторонах AC и AB прямогольного треугольника ABC с прямым углом A взяты точки E и F соответственно так, что $\angle AEF = \angle ABC$. Точки E' и F' - основания перпендикуляров, опущенных на BC из точек E и F сооветственно. Докажите, что $E'E + EF + FF' \leq BC$.

4. Докажите, что если $a_1, a_2, \ldots, a_n$- положительные числа, $n \geq 2$ и S - их сумма, то

$$\frac{a_1}{S-a_1} + \frac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \frac{a_n}{S-a_n} \geq \frac{n}{n-1}$$

5. Есть гири с номерами от 1 до n, для каждого k вес k-й гирьки целый и не превосходит k, а сумма всех весов чётна. Докажите, что все гири можно разбить на две кучки равного веса.

6. В каждом из 100 сосудов лежит по 99 камней. Два игрока ходят по очереди. Каждый игрок при своем ходе должен взять по одному камню из 98 сосудов. Игрок, после хода которого два сосуда оказались пусты, выигрывает. Кто выиграет при правильной игре — начинающий или его партнер?