Серия 28. Разнобой

1. Найдите все натуральные m, n удовлетворяющие соотношение $m! + 12 = n^2$.

2. Решите в целых числах $x^3 = y^3 + 2y^2 + 1$

3. На окружности отмечено 2016 синих и одна красная точка. Рассматриваются всевозможные выпуклые многоугольники с вершинами в этих точках. Каких многоугольников больше - тех, у которых есть красная вершина, или тех, у которых нет?

4. На доске в некотором порядке написаны числа $1, 2, 3, \ldots, 2018$. К каждому числу прибавили номер места, на котором оно стоит. Докажите, что получатся либо два равных числа, либо два числа, различающихся на 2018.

5. Пусть задано некоторое натуральное $n > 2$. Найдите наибольшее такое d, что в любом наборе из n натуральных чисел можно найти 3 различных (возможно, пересекающихся) непустых подмножества таких, что сумма чисел в каждом из этих подмножеств кратна d.

6. Дано натуральное число, большее 2017. Докажите, что его можно разложить в сумму нескольких неединичных натуральных слагаемых, произведение которых будет факториалом какого-нибудь натурального числа.

7. Пусть $x_1, \ldots, x_{100}$ неотрицательные действительные числа, такие что $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ для всех $i = 1, \ldots, 100$ (считаем $x_{101} = x_1$ и $x_{102} = x_2$). Найдите максимальное возможное значение суммы
$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}.$$