

Серия 49. Метод Штурма

1. а) Как изменяются при сближении двух положительных чисел с фиксированной суммой их произведение и сумма квадратов? А сумма обратных величин?
б) Как меняется сумма и сумма обратных величин при сближении с фиксированным произведением?

2. Докажите для положительных $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. неравенства о средних с помощью метода Штурма:

а)

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}} \geq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

б)

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

3. Докажите, что если сумма положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 1, то

$$\left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right)^2 + \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right)^2 + \dots + \left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)^2 \geq n \left(n + \frac{1}{n}\right)^2.$$

4. Сумма положительных чисел x_1, x_2, \dots, x_n равна 1. Докажите, что

$$\frac{(1-x_1)(1-x_2)\dots(1-x_n)}{x_1 x_2 \dots x_n} \geq (n-1)^n$$

5. Докажите, что для неотрицательных x_1, x_2, \dots, x_n с суммой 1 выполнено неравенство

$$(1+x_1)(2+x_2)\dots(n+x_n) \leq 2n!$$

6. Пусть $x_1 + \dots + x_n = \frac{1}{2}$, а все x_i — неотрицательны. Докажите, что

$$\frac{1-x_1}{1+x_1} \cdot \frac{1-x_2}{1+x_2} \cdot \dots \cdot \frac{1-x_n}{1+x_n} \geq \frac{1}{3}.$$

7. Для положительных $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_7$ докажите, что

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7)^2.$$