

## Серия 40. Разной

1. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно.

2. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые числа от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

3.  $2n$  чисел можно разбить на пары так, чтобы произведение чисел в каждой паре не квадрат. Доказать, что тогда таких разбиений на пары хотя бы  $n!$ .

4. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера  $a \times b$  дать либо ковёр размера  $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ , либо два ковра размеров  $c \times b$  и  $\frac{a}{c} \times b$  (при каждом таком обмене число  $c$  клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера  $a \times b$  считать ковром размера  $b \times a$ .)

5. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  простых чисел. Могут ли два подряд идущих члена последовательности  $(S_n)$  оказаться квадратами натуральных чисел?

6. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.

7. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?

## Серия 40. Разной

1. Натуральное число называется *незначительным*, если все его простые делители не превосходят миллиона. Простой делитель натурального числа называется *значительным*, если его квадрат больше данного числа. Докажите, что количество незначительных натуральных чисел, имеющих ровно один простой значительный делитель, нечётно.

2. В классе 33 человека. У каждого ученика спросили, сколько у него в классе тёзок и сколько однофамильцев (включая родственников). Оказалось, что среди названных чисел встретились все целые числа от 0 до 10 включительно. Докажите, что в классе есть два ученика с одинаковыми именем и фамилией.

3.  $2n$  чисел можно разбить на пары так, чтобы произведение чисел в каждой паре не квадрат. Доказать, что тогда таких разбиений на пары хотя бы  $n!$ .

4. У менялы на базаре есть много ковров. Он согласен взамен ковра размера  $a \times b$  дать либо ковёр размера  $\frac{1}{a} \times \frac{1}{b}$ , либо два ковра размеров  $c \times b$  и  $\frac{a}{c} \times b$  (при каждом таком обмене число  $c$  клиент может выбрать сам). Путешественник рассказал, что изначально у него был один ковёр, стороны которого превосходили 1, а после нескольких таких обменов у него оказался набор ковров, у каждого из которых одна сторона длиннее 1, а другая — короче 1. Не обманывает ли он? (По просьбе клиента меняла готов ковёр размера  $a \times b$  считать ковром размера  $b \times a$ .)

5. Для каждого натурального  $n$  обозначим через  $S_n$  сумму первых  $n$  простых чисел. Могут ли два подряд идущих члена последовательности  $(S_n)$  оказаться квадратами натуральных чисел?

6. Докажите, что если каждое из двух чисел является суммой квадратов двух целых чисел, то и их произведение является суммой квадратов двух целых чисел.

7. Сто гномов, веса которых равны 1, 2, 3, ..., 100 фунтов, собрались на левом берегу реки. Плавать они не умеют, но на этом же берегу находится гребная лодка грузоподъемностью 100 фунтов. Из-за течения плыть обратно трудно, поэтому у каждого гнома хватит сил грести с правого берега на левый не более одного раза (грести в лодке достаточно любому из гномов; гребец в течение одного рейса не меняется). Могут ли все гномы переправиться на правый берег?