Серия 52. Транснеравенство

Если $a_1 \geq \ldots \geq a_n,\ b_1 \geq \ldots \geq b_n$ и $\{i_1, \ldots, i_n\} = \{1, \ldots, n\}$, то

$$a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \geq a_1 b_{i_1} + \ldots + a_n b_{i_n} \geq a_1 b_n + \ldots + a_n b_1 .$$

1. *Неравенство Чебышёва.* Докажите, что для чисел $a_1 \geq \ldots \geq a_n$, $b_1 \geq \ldots \geq b_n$ справедливо неравенство

$$n \cdot (a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n) \cdot (b_1 + \ldots + b_n) \geq n \cdot (a_1 b_n + \ldots + a_n b_1) .$$

2. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a \cdot 2^a + b \cdot 2^b + c \cdot 2^c \geq a \cdot 2^b + b \cdot 2^c + c \cdot 2^a .$$

3. x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — положительные числа. Докажите неравенство

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_3} + \frac{x_3^2}{x_4} + \frac{x_4^2}{x_5} + \frac{x_5^2}{x_1} \geq x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 .$$

4. a, b, c — положительные числа. Докажите неравенство

$$a + b + c \geq \frac{a(b+1)}{a+1} + \frac{b(c+1)}{b+1} + \frac{c(a+1)}{c+1} .$$

5. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность различных натуральных чисел. Докажите неравенство

$$\frac{a_1}{1^2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_n}{n^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} .$$

6. Пусть a, b, c — стороны треугольника, а α, β, γ — соответствующие углы того же треугольника. Докажите неравенство

$$\alpha a + \beta b + \gamma c \geq \frac{1}{2}(\alpha b + \beta c + \gamma b + \alpha c + \beta a + \gamma a) .$$

7. Для положительных a_i докажите неравенство.

$$\sum_{i<j} \sqrt{a_i a_j} \leq \frac{n-1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i .$$