

Серия 11. КБШ наносит ответный удар

1. Пусть $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$. Докажите неравенство $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$.
2. С помощью КБШ докажите неравенство $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{2016}x_{2017} + x_{2017}x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2017}^2$.
3. Докажите неравенство $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \leq 2$.
4. Пусть $a^2 + b^2 > a + b$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$.
5. Докажите неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

6. Докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

7. Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Докажите неравенство $a + b + c \leq abc + 2$.
8. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + xy + y^2} \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \sqrt{x^2 + xz + z^2} + \\ & + \sqrt{x^2 + xy + y^2} \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq (x + y + z)^2. \end{aligned}$$

Серия 11. КБШ наносит ответный удар

1. Пусть $|a| \leq 1$, $|b| \leq 1$. Докажите неравенство $ab + \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} \leq 1$.
2. С помощью КБШ докажите неравенство $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \dots + x_{2016}x_{2017} + x_{2017}x_1 \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2017}^2$.
3. Докажите неравенство $\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha + \cos \beta \leq 2$.
4. Пусть $a^2 + b^2 > a + b$, $a > 0$, $b > 0$. Докажите, что $a^3 + b^3 > a^2 + b^2$.
5. Докажите неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2)} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)(x + y + z).$$

6. Докажите неравенство

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)(a_1^7 + a_2^7 + \dots + a_n^7) \geq (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)(a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5).$$

7. Пусть $a^2 + b^2 + c^2 = 2$. Докажите неравенство $a + b + c \leq abc + 2$.
8. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + xy + y^2} \sqrt{y^2 + yz + z^2} + \sqrt{y^2 + yz + z^2} \sqrt{x^2 + xz + z^2} + \\ & + \sqrt{x^2 + xy + y^2} \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geq (x + y + z)^2. \end{aligned}$$