Серия 1. Индукция

1. Дан правильный треугольник со стороной 1. За один ход можно увеличить одну из сторон треугольника, но так, чтобы он остался треугольником. Докажите, что после n ходов наибольшая сторона будет меньше (n+2)-го члена ряда Фибоначчи $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13 \ldots$

2. Проведём в выпуклом многоугольнике некоторые диагонали так, что никакие две из них не пересекаются (из одной вершины могут выходить несколько диагоналей). Доказать, что найдутся по крайней мере две вершины многоугольника, из которых не проведено ни одной диагонали.

3. При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, ..., n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?

4. В n мензурок налиты n разных жидкостей, одна из которых полна. Кроме того, имеется одна пустая мензурка. Можно ли за конечное число операций составить равномерные смеси в каждой мензурке, то есть сделать так, чтобы в каждой мензурке было равно $\frac{1}{n}$ от начального количества каждой жидкости, и при этом одна мензурка была бы пустой. (Мензурки одинаковые, но количества жидкостей в них могут быть разными; предполагается, что можно отмерять любой объём жидкости.)

5. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n+1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?

6. На кольцевой автомобильной дороге стоят несколько одинаковых автомашин. Если бы весь бензин, имеющийся в этих автомашинах, слили в одну, то эта машина смогла бы проехать по всей кольцевой дороге и вернуться на прежнее место. Докажите, что хотя бы одна из этих машин может объехать всё кольцо, забирая по пути бензин у остальных машин.

7. Докажите, что для любого k и любого нечётного m найдётся такое n, что $n^n - m$ делится на 2^k.

8. Изначально на доске записаны несколько(больше одного) натуральных чисел. Затем каждую минуту на доску записывается число, равное сумме квадратов всех уже записанных на ней чисел. Докажите, что сотое записанное число имеет хотя бы 100 различных простых делителей.