ЦПМ. Группа 9-2 **15.03.2018**

Теорема Хелли и другие задачи

1. На прямой дана система белых, и система черных отрезков. Известно, что любой черный отрезок пересекается с любым белым. Докажите, что отрезки одной из систем имеют общую точку.

2. На плоскости дана система белых, и система черных прямоугольников, со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой черный прямоугольник пересекается с любым белым. Докажите, что или прямоугольники одной из систем имеют общую точку, или прямоугольники каждой из систем по отдельности можно проткнуть одной прямой.

3. На прямой дана система отрезков, покрашенных в три цвета. Известно, что среди любых трех разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что отрезки одной из систем можно приколоть двумя кнопками.

4. На прямой дана система отрезков, покрашенных в n цвета. Известно, что среди любых n разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что отрезки одной из систем можно приколоть $(n-1)$ кнопками.

5. Докажите, что если любые два отрезка на прямой имеют общую точку, то все отрезки имеют общую точку.

6 (теорема Хелли). Докажите, что если любые три выпуклых множества на плоскости имеют общую точку, то все множества имеют общую точку.

7. Дано n точек, причем любые три из них можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все n точек можно покрыть кругом радиуса 1.

8. Комната имеет форму невыпуклого многоугольника. Известно, что люстра освещает любые три стены комнаты. Докажите, что вся комната освещена.

9 (теорема Юнга). Докажите, что конечное множество диаметра 1 можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10 (теорема Бляшке). В выпуклой фигуре постоянной ширины 1 содержится круг диаметра $\frac{1}{3}$.

11. На плоскости даны n точек. Докажите, что найдется такая точка M, что любая прямая l, проходящая через M, делит плоскость на части в каждой из которых не менее $\frac{n}{3}$ точек. (Точки на границе включаются в обе части)

12. На плоскости расположено конечное число овец и волков. Известно, что для любых четырех животных можно построить разделяющий их прямолинейный забор. Доказать, что можно построить и забор, разделяющий всех волков от всех овец.

ЦПМ. Группа 9-2 **15.03.2018**

Теорема Хелли и другие задачи

1. На прямой дана система белых, и система черных отрезков. Известно, что любой черный отрезок пересекается с любым белым. Докажите, что отрезки одной из систем имеют общую точку.

2. На плоскости дана система белых, и система черных прямоугольников, со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой черный прямоугольник пересекается с любым белым. Докажите, что или прямоугольники одной из систем имеют общую точку, или прямоугольники каждой из систем по отдельности можно проткнуть одной прямой.

3. На прямой дана система отрезков, покрашенных в три цвета. Известно, что среди любых трех разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что отрезки одной из систем можно приколоть двумя кнопками.

4. На прямой дана система отрезков, покрашенных в n цвета. Известно, что среди любых n разноцветных отрезков найдутся два пересекающихся. Докажите, что отрезки одной из систем можно приколоть $(n-1)$ кнопками.

5. Докажите, что если любые два отрезка на прямой имеют общую точку, то все отрезки имеют общую точку.

6 (теорема Хелли). Докажите, что если любые три выпуклых множества на плоскости имеют общую точку, то все множества имеют общую точку.

7. Дано n точек, причем любые три из них можно покрыть кругом радиуса 1. Докажите, что все n точек можно покрыть кругом радиуса 1.

8. Комната имеет форму невыпуклого многоугольника. Известно, что люстра освещает любые три стены комнаты. Докажите, что вся комната освещена.

9 (теорема Юнга). Докажите, что конечное множество диаметра 1 можно покрыть кругом радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10 (теорема Бляшке). В выпуклой фигуре постоянной ширины 1 содержится круг диаметра $\frac{1}{3}$.

11. На плоскости даны n точек. Докажите, что найдется такая точка M, что любая прямая l, проходящая через M, делит плоскость на части в каждой из которых не менее $\frac{n}{3}$ точек. (Точки на границе включаются в обе части)

12. На плоскости расположено конечное число овец и волков. Известно, что для любых четырех животных можно построить разделяющий их прямолинейный забор. Доказать, что можно построить и забор, разделяющий всех волков от всех овец.