Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-2.

Серия 8 Гомотетия.

Гомотетией с центром в точке O и ненулевым коэффициэнтом k называется преобразование плоскости, которое каждую точку A плоскости переводит в A' такую, что $OA' = kOA$.

1. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата образуют квадрат.

2. (a) Найдите геометрическое место середин хорд, одним из концов которых является данная точка окружности A.

   (b) В окружности ω проведена хорда AB. Найдите геометрическое место точек пересечения медиан треугольников ABC, где $C \in \omega$.

3. В треугольнике ABC медианы AA_0, BB_0, CC_0 пересекаются в точке M, высоты AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке H, а точка O — центр описанной окружности.

   (a) *Окружность Эйлера.* Докажите, что точки $A_0, B_0, C_0, A_1, B_1, C_1$, а также середины отрезков AH, BH, CH лежат на одной окружности, радиус которой вдвое меньше радиуса описанной окружности треугольника ABC.

   (b) *Прямая Эйлера.* Докажите, что точки H, O, M и центр окружности Эйлера лежат на одной прямой и найдите отношения, в котором последние две точки делят отрезок OH.

4. Докажите, что неравные треугольники с попарно параллельными сторонами гомотетичны.

5. В треугольнике ABC точки I_a, I_b, I_c - центры вневписанных окружностей ,касающихся сторон BC, AC, AB соответственно, A_1, B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC, AB соответсвенно. Докажите, что прямые I_aA_1, I_bB_1, I_cC_1 пересекаются в одной точке.

6. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон в точках A_1, B_1, C_1. Точки A_2, B_2, C_2 — середины дуг BAC, ABC, ACB описанной окружности. Докажите, что прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке.

7. Докажите, что любой выпуклый многоугольник M содержит два непересекающихся во внутренних точках многоугольника M_1 и M_2, подобных M с коэффициентом $\frac{1}{2}$.