

Серия 43. Разнобой

1. Продолжения медиан AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекают его описанную окружность в точках A_0 , B_0 и C_0 соответственно. Оказалось, что площади треугольников ABC_0 , AB_0C и A_0BC равны. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
2. У Васи есть 100 карточек трех цветов, карточек каждого цвета не больше 50. Докажите, что он может выложить из них квадрат 10 на 10 так, чтобы любые две соседние (по стороне) карточки оказались разного цвета.
3. В банде 101 бандит. Все вместе они в вылазках ни разу не участвовали, а каждые двое встречались в вылазках ровно по разу. Докажите, что один из бандитов участвовал не менее, чем в 11 различных вылазках.
4. На плоскости дано n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не менее $2n - 3$.
5. Число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей отличных от самого себя (например 6), докажите, что если совершенное число больше 28 делится на 7, то оно делится и на 49.
6. В ботаническом справочнике каждое растение характеризуется 100 признаками (каждый признак либо присутствует, либо отсутствует). Два растения считаются непохожими, если они различаются не менее, чем по 51 признаку. Докажите, что в справочнике не может находиться более 50 попарно непохожих растений.
7. Имеется 25 масок, каждая своего цвета. k мудрецов играют в игру: им показывают все маски, потом они договариваются между собой, после чего им надевают маски таким образом, что каждый из них видит маски на всех остальных (но не знает, на ком они надеты) и не видит свою. Никакие формы взаимодействия при этом не разрешаются. Все они одновременно называют по одному цвету, пытаясь угадать цвет своей маски. При каком наименьшем k они могут так заранее договориться, чтобы хотя бы один из них непременно угадал?