Серия 41. Комбинаторика

Будем называть множество из k юношей перспективным, если суммарно эти юноши знают хотя бы k девушек, а критическим — если они знают ровно k девушек. Лемма Холла гласит, что всех юношей можно женить на знакомых им девушках тогда и только тогда, когда любое множество юношей является перспективным.

1. У сороконожки есть 40 носков и 40 ботинок. Она может надевать их в любом порядке с одним лишь условием: на каждую ногу надо сначала надеть носок, а только потом ботинок. Сколькими способами она может обуться?

2. Сколькими способами m птиц попарно различных видов можно рассадить по n клеткам попарно различных цветов, если в каждой клетке должны сидеть одна или две птицы?

3. Сколькими способами можно выбрать в множестве из десяти элементов два подмножества A и B, которые бы в объединении давали бы все множество?

4. Лампочки расставлены в виде квадрата 6×6. Исходно все они выключены. За одну операцию можно изменить состояние всех лампочек в некотором квадрате 2×2 на противоположное. Сколько разных конфигураций можно таким образом получить?

5. Сколькими способами можно покрасить в два цвета клетки доски $n \times n$ так, чтобы в каждом квадрате 2×2 было чётное число чёрных клеток?

6. Из доски $k \times k$ выбросили клетки, лежащие выше главной диагонали. В оставшиеся $\frac{k(k+1)}{2}$ клеток расставляют числа от 1 до $\frac{k(k+1)}{2}$ каждое по одному разу. Сколько существует способов так расставить числа, что $M_1 < M_2 < \ldots < M_k$, где через M_i обозначено максимальное число в i-м столбце (содержащем i клеток)?

7. Найдите количество путей на клетчатой решетке из $(0, 0)$ в (n, n) длины $2n + 2$, не проходящих через одну точку дважды (за 1 шаг можно двигаться на 1 клетку вправо, вверх, влево или вниз).

8. Улитка должна проползти вдоль линий клетчатой бумаги путь длины $2n$, начав и кончив свой путь в данном узле. Сколько у неё различных маршрутов?

9. Натуральные числа от 1 до n расставляются в ряд в произвольном порядке. Расстановка называется плохой, если в ней можно отметить 10 чисел (не обязательно стоящих подряд), идущих в порядке убывания. Остальные расстановки называются хорошими. Докажите, что количество хороших расстановок не превосходит 81^n.