

Про биссектрисы и неравенства

1. Докажите, что если биссектрисы треугольника ABC инцентром делятся в одном и том же отношении, то треугольник является равносторонним.

2. Биссектриса AL_1 пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках E и T . Какой из отрезков длиннее: AE или TL_1 ?

3. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке K . Докажите, что отрезок AK длиннее диаметра этой окружности.

4. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Найдите длины отрезков этих прямых, отсекаемых сторонами треугольника.

5. Стороны треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию ($b + c = 2a$). Докажите, что $MI \parallel a$. Ну, и обратной факт верен!

6. Докажите, что $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$.

7. Докажите, что $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$.

8. Докажите формулу Мольвейде:

$$\frac{\cos \frac{|\beta-\gamma|}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{a}.$$

9. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство $AI + BI + CI \geq 3r$.

10. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство $\frac{AI}{AL_1} \cdot \frac{BI}{BL_2} \cdot \frac{CI}{CL_3} \leq \frac{8}{27}$.

Про биссектрисы и неравенства

1. Докажите, что если биссектрисы треугольника ABC инцентром делятся в одном и том же отношении, то треугольник является равносторонним.

2. Биссектриса AL_1 пересекает вписанную в треугольник ABC окружность в точках E и T . Какой из отрезков длиннее: AE или TL_1 ?

3. Вписанная в треугольник окружность касается стороны BC в точке K . Докажите, что отрезок AK длиннее диаметра этой окружности.

4. В треугольнике ABC через точку пересечения биссектрис проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Найдите длины отрезков этих прямых, отсекаемых сторонами треугольника.

5. Стороны треугольника ABC составляют арифметическую прогрессию ($b + c = 2a$). Докажите, что $MI \parallel a$. Ну, и обратной факт верен!

6. Докажите, что $\sin \frac{\alpha}{2} \leq \frac{a}{b+c}$.

7. Докажите, что $\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}$.

8. Докажите формулу Мольвейде:

$$\frac{\cos \frac{|\beta-\gamma|}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{b+c}{a}.$$

9. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство $AI + BI + CI \geq 3r$.

10. Докажите, что в произвольном треугольнике ABC имеет место неравенство $\frac{AI}{AL_1} \cdot \frac{BI}{BL_2} \cdot \frac{CI}{CL_3} \leq \frac{8}{27}$.