ЦПМ. Группа 9-2 **23.04.2018**

Алгебра

1. Пусть a, b, c, d, e — действительные числа такие, что $a+b+c+d+e=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$. Найдите наибольшее возможное значение e.

2. Известно, что уравнение $x^2+5bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, а некоторое число является корнем уравнения $y^2+2x_1y+2x_2=0$ и корнем уравнения $z^2+2x_2z+2x_1=0$. Найти b.

3. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_9 и b_1, b_2, $\ldots$, b_9 — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?

4. Даны действительны числа a_1, $\ldots$, a_{2016}. Пусть уравнение

$$x^{2018}-2018x^{2017}+a_{2016}x^{2016}+\ldots+a_2x^2+a_1x+1=0$$

имеет 2018 положительных действительных решений. Найдите максимальное значение a_1.

5. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ имеет одно решение (решение в данном случае — упорядоченная пара (x,y), число n выступает в роли параметра) в натуральных числах тогда и только тогда, когда n — простое число.

6. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc=1$. Докажите, что $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3$.

7. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{17} — действительные числа из интервала $[-20,20]$. Найдите наименьшее значение выражения $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{16}a_{17}+a_{17}a_1$.

8. Пусть x, y — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $2x^2+x=3y^2+y$. Докажите, что $x-y$ — полный квадрат.

ЦПМ. Группа 9-2 **23.04.2018**

Алгебра

1. Пусть a, b, c, d, e — действительные числа такие, что $a+b+c+d+e=8$, $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$. Найдите наибольшее возможное значение e.

2. Известно, что уравнение $x^2+5bx+c=0$ имеет корни x_1 и x_2, $x_1 \neq x_2$, а некоторое число является корнем уравнения $y^2+2x_1y+2x_2=0$ и корнем уравнения $z^2+2x_2z+2x_1=0$. Найти b.

3. На доске написаны девять приведённых квадратных трёхчленов: $x^2+a_1x+b_1$, $x^2+a_2x+b_2$, $\ldots$, $x^2+a_9x+b_9$. Известно, что последовательности a_1, a_2, $\ldots$, a_9 и b_1, b_2, $\ldots$, b_9 — арифметические прогрессии. Оказалось, что сумма всех девяти трёхчленов имеет хотя бы один корень. Какое наибольшее количество исходных трёхчленов может не иметь корней?

4. Даны действительны числа a_1, $\ldots$, a_{2016}. Пусть уравнение

$$x^{2018}-2018x^{2017}+a_{2016}x^{2016}+\ldots+a_2x^2+a_1x+1=0$$

имеет 2018 положительных действительных решений. Найдите максимальное значение a_1.

5. Докажите, что уравнение $\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$ имеет одно решение (решение в данном случае — упорядоченная пара (x,y), число n выступает в роли параметра) в натуральных числах тогда и только тогда, когда n — простое число.

6. Пусть a, b, c — положительные числа, удовлетворяющие условию $abc=1$. Докажите, что $\frac{1+ab}{1+a}+\frac{1+bc}{1+b}+\frac{1+ca}{1+c} \geqslant 3$.

7. Пусть a_1, a_2, $\ldots$, a_{17} — действительные числа из интервала $[-20,20]$. Найдите наименьшее значение выражения $a_1a_2+a_2a_3+\cdots+a_{16}a_{17}+a_{17}a_1$.

8. Пусть x, y — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению $2x^2+x=3y^2+y$. Докажите, что $x-y$ — полный квадрат.