**ЦПМ. Кружок 9-2** **15.02.2018**

## Серия 31. Ещё раз про квадратные и не только уравнения

**1**. Квадратный трёхчлен $ax^2+2bx+c$ имеет два различных корня, а квадратный трёхчлен $a^2x^2+2b^2x+c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трёхчлена корни разного знака.

**2**. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

**3**. Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших 2017, другой — два корня, больших 2017. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень меньший 2017, а другой — больший 2017?

**4**. Существуют ли два квадратных трёхчлена $ax^2+bx+c$ и $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

**5**. Графики функций $y=ax^2$, $y=bx$ и $y=c$ пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение $ax^2+bx+c=0$.

**6**. Прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках с абсциссами $x_1$ и $x_2$, а ось абсцисс — в точке с абсциссой $x_3$. Докажите, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$

**7**. Могут ли все корни уравнений $x^2-px+q=0$ и $x^2-(p+1)x+q=0$ оказаться целыми числами, если $q<0$?

**8**. Пусть $a$, $b$, $c$ — три различных числа. Решите систему $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0, \\ x+by+b^2z+b^3=0, \\ x+cy+c^2z+c^3=0. \end{cases}$

**9**. Рассматриваются всевозможные квадратные трёхчлены вида $x^2+px+q$, где $p$, $q$ — целые, $1\leqslant p\leqslant 2017$, $1\leqslant q\leqslant 2017$. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих действительные корни или не имеющих действительных корней?

**10**. На доске написано несколько приведённых многочленов 2017-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена $f$ и $g$ и заменить их на такие два приведённых многочлена 2017-й степени $f_1$ и $g_1$, что $f+g=f_1+g_1$ или $fg=f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 2017 различных положительных корней.

**ЦПМ. Кружок 9-2** **15.02.2018**

## Серия 31. Ещё раз про квадратные и не только уравнения

**1**. Квадратный трёхчлен $ax^2+2bx+c$ имеет два различных корня, а квадратный трёхчлен $a^2x^2+2b^2x+c^2$ корней не имеет. Докажите, что у первого трёхчлена корни разного знака.

**2**. Дискриминанты трёх приведённых квадратных трёхчленов равны 1, 4 и 9. Докажите, что можно выбрать по одному корню каждого из них так, чтобы их сумма равнялась сумме оставшихся корней.

**3**. Один из двух приведённых квадратных трёхчленов имеет два корня, меньших 2017, другой — два корня, больших 2017. Может ли сумма этих трёхчленов иметь один корень меньший 2017, а другой — больший 2017?

**4**. Существуют ли два квадратных трёхчлена $ax^2+bx+c$ и $(a+1)x^2+(b+1)x+(c+1)$ с целыми коэффициентами, каждый из которых имеет по два целых корня?

**5**. Графики функций $y=ax^2$, $y=bx$ и $y=c$ пересекаются в точке, расположенной выше оси абсцисс. Определите, сколько корней может иметь уравнение $ax^2+bx+c=0$.

**6**. Прямая пересекает график функции $y=x^2$ в точках с абсциссами $x_1$ и $x_2$, а ось абсцисс — в точке с абсциссой $x_3$. Докажите, что $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{1}{x_3}$

**7**. Могут ли все корни уравнений $x^2-px+q=0$ и $x^2-(p+1)x+q=0$ оказаться целыми числами, если $q<0$?

**8**. Пусть $a$, $b$, $c$ — три различных числа. Решите систему $\begin{cases} x+ay+a^2z+a^3=0, \\ x+by+b^2z+b^3=0, \\ x+cy+c^2z+c^3=0. \end{cases}$

**9**. Рассматриваются всевозможные квадратные трёхчлены вида $x^2+px+q$, где $p$, $q$ — целые, $1\leqslant p\leqslant 2017$, $1\leqslant q\leqslant 2017$. Каких трёхчленов среди них больше: имеющих действительные корни или не имеющих действительных корней?

**10**. На доске написано несколько приведённых многочленов 2017-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена $f$ и $g$ и заменить их на такие два приведённых многочлена 2017-й степени $f_1$ и $g_1$, что $f+g=f_1+g_1$ или $fg=f_1g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 2017 различных положительных корней.