ЦПМ. Кружок 9-2 **05.02.2018**

Серия 29. Числовой разнобой

1. Решите в натуральных числах уравнения
а) $2^x + 1 = y^2$; б) $2^x = y^2 + 1$.

2. Автомат преобразует введенное в него число по следующему правилу: на k-м шаге он умножает число на k, если k нечетно, делит на k, если k четно, но не делится на 4, умножает на 1, если k делится на 4. Если число становится нецелым, автомат ломается. От какого наименьшего числа автомат сломается в точности после 102-го шага?

3. Сколько существует пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству $3x^2-10xy+3y^2-2x-2y-1 = 2009^{2009}$?

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{abc+a+c}{bc+1} = \frac{4020}{2009}$. Найдите $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.

5. Докажите, что среди любых 1009 различных натуральных чисел от 1 до 2009 либо найдется степень двойки, либо найдутся два числа, сумма которых есть степень двойки.

6. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2 + 2kn + m^2$ является точным квадратом, то $m = n$.

7. Сколько решений в натуральных числах, меньших 2000000, имеет уравнение $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$?

8. Целые числа a_1, a_2, …, a_9 удовлетворяют соотношениям $a_{k+1} = a_k^3 + a_k^2 + a_k + 2$ при $k = 1, 2, \ldots, 8$. Докажите, что среди этих чисел есть три, имеющие общий делитель, больший 1.

ЦПМ. Кружок 9-2 **05.02.2018**

Серия 29. Числовой разнобой

1. Решите в натуральных числах уравнения
а) $2^x + 1 = y^2$; б) $2^x = y^2 + 1$.

2. Автомат преобразует введенное в него число по следующему правилу: на k-м шаге он умножает число на k, если k нечетно, делит на k, если k четно, но не делится на 4, умножает на 1, если k делится на 4. Если число становится нецелым, автомат ломается. От какого наименьшего числа автомат сломается в точности после 102-го шага?

3. Сколько существует пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих равенству $3x^2-10xy+3y^2-2x-2y-1 = 2009^{2009}$?

4. Натуральные числа a, b, c таковы, что $\frac{abc+a+c}{bc+1} = \frac{4020}{2009}$. Найдите $\frac{abc+a+c}{ab+1}$.

5. Докажите, что среди любых 1009 различных натуральных чисел от 1 до 2009 либо найдется степень двойки, либо найдутся два числа, сумма которых есть степень двойки.

6. Даны натуральные числа m и n. Докажите, что если при бесконечно многих натуральных k число $k^2 + 2kn + m^2$ является точным квадратом, то $m = n$.

7. Сколько решений в натуральных числах, меньших 2000000, имеет уравнение $(m-n)^2 = \frac{4mn}{m+n-1}$?

8. Целые числа a_1, a_2, …, a_9 удовлетворяют соотношениям $a_{k+1} = a_k^3 + a_k^2 + a_k + 2$ при $k = 1, 2, \ldots, 8$. Докажите, что среди этих чисел есть три, имеющие общий делитель, больший 1.