

## Серия 26. Графский разнбой

1. В стране Анчурии все дороги с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

2. В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно посадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

3. В Верхней Унутрии некоторые города связаны двусторонними беспосадочными авиарейсами. Рейсы разделены между тремя авиакомпаниями, причем если какая-то авиакомпания обслуживает линию между городами А и Б, то самолеты других компаний между этими городами не летают. Известно, что из каждого города летают самолеты всех трех компаний. Докажите, что можно, вылетев из некоторого города, вернуться в него, воспользовавшись по пути рейсами всех трех компаний и не побывав ни в одном из промежуточных городов дважды.

4. В компании из 9 девушек некоторые поссорились. Оказалось, что нет такой тройки девушек, в которой каждая девочка поссорилась с каждой. Докажите, что найдутся четыре девушки, среди которых ни одна пара еще не поссорилась.

5. Возможна ли такая компания, в которой у каждого ровно 6 друзей, а у любых двух — ровно 2 общих друга?

6. В компании из 2018 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека дружат, если они знакомы, и у них есть общий знакомый. Назовем человека необщительным, если у него нет друзей. Назовем человека странным, если он имеет в этой компании 1008 знакомых, но при этом необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в этой компании?

7. Докажите, что если степени всех вершин графа не превосходят  $k$ , то можно так покрасить вершины этого графа в  $k + 1$  цвет, что все ребра соединяют вершины, покрашенные в различные цвета.

8. В стране Графинии  $n$  ( $n \geq 2$ ) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше  $d$  авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на  $\frac{n}{2} + d$  групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.