ЦПМ. Группа 9-2 **18.12.2017**

Серия 23. Поговорим о принципах

1. Сумма 123 чисел равна 3813. Доказать, что из этих чисел можно выбрать 100 с суммой не меньше 3100.

2. Сумма десяти натуральных чисел равна 1001. Какое наибольшее значение может принимать наибольший общий делитель этих чисел?

3. Петя выбрал натуральное число $a > 1$ и выписал на доску пятнадцать чисел $1 + a$, $1 + a^2$, $1 + a^3$, …, $1 + a^{15}$. Затем он стёр несколько чисел так, что каждые два оставшихся числа взаимно просты. Какое наибольшее количество чисел могло остаться на доске?

4. 30 учеников одного класса решили побывать друг у друга в гостях. Известно, что ученик за вечер может сделать несколько посещений, и что в тот вечер, когда к нему кто-нибудь должен прийти, он сам никуда не уходит. Покажите, что для того, чтобы все побывали в гостях у всех, пяти вечеров недостаточно.

5. Куб $20 \times 20 \times 20$ составлен из 2000 кирпичей размером $2 \times 2 \times 1$. Докажите, что его можно проткнуть иглой так, чтобы игла прошла через две противоположные грани и не уткнулась в кирпич.

6. В квадрат со стороной 1 поместили несколько окружностей, сумма радиусов которых равна $0,57$. Докажите, что существует прямая, параллельная стороне квадрата и пересекающая не менее двух окружностей.

7. Докажите, что для произвольного иррационального числа α и натурального числа s существует такое рациональное число $\frac{m}{n}$, что $0 < n \leqslant s$ и $\left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{1}{ns}$.

8. Рассмотрим граф, у которого вершины соответствуют всевозможным трёхэлементным подмножествам множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$, а рёбра проводятся между вершинами, которые соответствуют подмножествам, пересекающимся ровно по одному элементу. Найдите минимальное количество цветов, в которые можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две вершины, соединённые ребром, были разного цвета.