ЦПМ. Кружок 9-2 **06.11.2017**

Теорема Турана и не только

1. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся хотя бы два друга. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

2. В коллективе из 30 человек любых пятерых можно усадить за круглый стол таким образом, что каждый будет сидеть со своим знакомым. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, где каждый знаком с каждым.

3. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

4. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга; ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей; $\ldots$; ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.

5. 22 школьника участвовали в съезде юных писателей. После съезда каждый из них прочитал произведения трех юных писателей, побывавших на съезде. Докажите, что из делегатов съезда можно составить комиссию из четырех человек так, что в комиссии никто не читал произведения остальных ее членов.

6. В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

7. На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 83 докладов, сделанных его коллегами. Докажите, что найдутся четверо, каждому из которых понравились доклады трех других.

8. Некоторые города Графинии соединены дорогами. Из каждого города выходит не более n дорог, но среди каждых m городов есть два, соединенные дорогой, не проходящей через другие города. Какое наибольшее количество городов может быть в Графинии?

9. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

10. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нем найдется не менее n треугольников.

ЦПМ. Кружок 9-2 **06.11.2017**

Теорема Турана и не только

1. В классе 17 учеников. Известно, что среди любых трех учеников найдутся хотя бы два друга. Докажите, что в классе есть ученик, у которого не менее 8 друзей.

2. В коллективе из 30 человек любых пятерых можно усадить за круглый стол таким образом, что каждый будет сидеть со своим знакомым. Докажите, что в этом коллективе найдется компания из 10 человек, где каждый знаком с каждым.

3. В графе на 300 вершинах степень каждой вершины не менее 190. Докажите, что можно выбрать 25 треугольников, попарно не имеющих общих вершин.

4. В кружке 20 учеников. Среди них есть ученик, имеющий среди кружковцев одного друга; ученик, имеющий среди кружковцев двух друзей; $\ldots$; ученик, имеющий среди кружковцев 14 друзей. Докажите, что найдутся трое кружковцев, любые двое из которых дружат.

5. 22 школьника участвовали в съезде юных писателей. После съезда каждый из них прочитал произведения трех юных писателей, побывавших на съезде. Докажите, что из делегатов съезда можно составить комиссию из четырех человек так, что в комиссии никто не читал произведения остальных ее членов.

6. В графе 34 вершины, степень каждой не менее 4, и для каждой вершины есть еще ровно одна вершина той же степени. Докажите, что в этом графе есть три вершины, попарно соединенные ребрами.

7. На конгресс приехало 100 ученых, каждый из которых сделал доклад. В конце каждый заявил, что ему понравилось ровно 83 докладов, сделанных его коллегами. Докажите, что найдутся четверо, каждому из которых понравились доклады трех других.

8. Некоторые города Графинии соединены дорогами. Из каждого города выходит не более n дорог, но среди каждых m городов есть два, соединенные дорогой, не проходящей через другие города. Какое наибольшее количество городов может быть в Графинии?

9. В стране 210 городов и совсем нет дорог. Король хочет построить несколько дорог с односторонним движением так, чтобы для любых трех городов A, B, C, между которыми есть дороги, ведущие из A в B и из B в C, не было бы дороги, ведущей из A в C. Какое наибольшее число дорог он сможет построить?

10. В графе на $2n$ вершинах n^2+1 ребро. Докажите, что в нем найдется не менее n треугольников.