

## Серия 5. Неравенство Коши–Буняковского

1. Докажите, что при всех  $(a, b, c, d)$  верно неравенство  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ .
2. Известно, что  $a + b + c = 1$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .
3. Известно, что  $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$ . Найдите максимальное значение выражения  $6x - 4y + 24z$ .
4. Известно, что  $a + b + c = 1$ . Найдите максимальные значения выражения  $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ .
5. Решите уравнение  $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$ .
6. Докажите, что для любых чисел  $a_1, \dots, a_{1987}$  и положительных чисел  $b_1, \dots, b_{1987}$  справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \dots + a_{1987})^2}{b_1 + \dots + b_{1987}} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

7. Докажите неравенство  $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \right) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$ .
8. Среди всех решений  $(a, b, c, d)$  системы 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$
 найти такие, при которых величина  $b + d$  принимает наименьшее значение.

## Серия 5. Неравенство Коши–Буняковского

1. Докажите, что при всех  $(a, b, c, d)$  верно неравенство  $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$ .
2. Известно, что  $a + b + c = 1$ . Докажите, что  $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$ .
3. Известно, что  $9x^2 + 16y^2 + 144z^2 = 169$ . Найдите максимальное значение выражения  $6x - 4y + 24z$ .
4. Известно, что  $a + b + c = 1$ . Найдите максимальные значения выражения  $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$ .
5. Решите уравнение  $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$ .
6. Докажите, что для любых чисел  $a_1, \dots, a_{1987}$  и положительных чисел  $b_1, \dots, b_{1987}$  справедливо неравенство

$$\frac{(a_1 + \dots + a_{1987})^2}{b_1 + \dots + b_{1987}} \leq \frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_{1987}^2}{b_{1987}}.$$

7. Докажите неравенство  $(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4) \left( \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \frac{a_3}{b_3} + \frac{a_4}{b_4} \right) \geq (a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2$ .
8. Среди всех решений  $(a, b, c, d)$  системы 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geq 12 \end{cases}$$
 найти такие, при которых величина  $b + d$  принимает наименьшее значение.