Серия 21. Разнобой

1. В чемпионате по футболу участвовало 10 команд. Каждые две команды сыграли между собой один матч. За победу в матче присуждалось 3 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. В сумме все команды набрали в чемпионате 119 очков. Докажите, что была команда, сыгравшая вничью хотя бы 4 раза.

2. Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$ и $P(n)$ — иррационально для любого целого n, отличного от 1 и 2?

3 Существуют ли 200 различных натуральных чисел таких, что сумма первых ста равна сумме остальных, а произведение первых ста равно произведению остальных чисел.

4. Вещественные числа x, y, z удовлетворяют условиям $x + y + z = 2$ и $xyz = 2(xy + yz + zx)$. Найдите все возможные тройки (x, y, z).

5. На полке стоят 666 книг по белой и черной магии, причем никакие две книги по белой магии не стоят через 13 книг (т.е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

6. Докажите, что найдётся бесконечно много натуральных n таких, что $2^n + n$ делится на 2017.

7. Решите уравнение $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$.

8. В классе 30 школьников. Известно, что любые два школьника имеют хотя бы 4 общих друга. Докажите, что есть школьник, у которого хотя бы 12 друзей.

9. Сколькими способами из чисел 1, 2, …, $2n$ можно выбрать два или больше так, чтобы никакие два выбранных числа в сумме не давали $2n + 1$?

10. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + c$. Докажите, что $f(f(x)) = x$ не может иметь ровно три действительных корня.