Серия 21. Теория чисел.

1. Докажите, что найдутся 2017 последовательных чисел, таких, что k-ое по счету число делится на p_k^3, где p_k - k-ое по счету простое число.

2. Докажите, что существует бесконечно много составных чисел вида $10^n + 3$

3. Докажите, что $30^{239} + 239^{30}$ — составное.

4. Число называется плохим, если не делится на 2,3,5,7,11,13,17. Число называется хорошим, если делится на 2 или больше из этих чисел. Какое наибольшее количество плохих чисел можно выбрать так, чтобы сумма любых двух их них была хорошим числом?

5. Если $x^2 + 1$ делится на простое p, то p не может быть вида $4k + 3$.

6. *Теорема Вильсона.* Пусть p — простое число. Докажите, что $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.

7. p - простое число. Докажите, что $(2p-1)! - p$ делится на p^2

8. Назовём число неадекватным, если количество различных его простых делителей превосходит наименьший из них. Существуют ли 2017 последовательныъ неадекватных чисел?

9. Пусть p — простое число, тогда $(11\ldots122\ldots233\ldots99 - 123456789)$ (в первом числе каждая цифра встречается ровно p раз) делится на p.

10. Докажите, что в любой арифметической прогрессии составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.