Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Неразобранные задачи из серий 1-11.

Когда-то на кружке разберём всё, что хоть кто-то решил.

1-6б(0 решивших). В графе $2n$ вершин и проведено n^2+1 рёбер. Докажите, что в графе есть хотя бы n треугольников.

1-7(0 решивших). На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: "Кем является такой- то: химиком или алхимиком?"(В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за $[1,5k-1,5]$ вопросов.

1-8(0 решивших). Команда, состоящая из $N(N+1)$ футболистов разного роста, выстроена в ряд. Докажите, что тренер всегда сможет удалить из ряда $N(N-1)$ футболистов так, чтобы среди оставшихся $2N$ футболистов были верны следующие утверждения:

(1) Никто не стоит между первым и вторым по росту

(2) Никто не стоит между третьим и четвёртым

....

(N) Никто не стоит между предпоследним и последним по росту.

2-5(Мустафин). Найдите все тройки x, y, z положительных действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$x^2+y^2+z^2=xyz+4;$$

$$xy+yz+zx=2(x+y+z).$$

2-8(Неустроева, Рябченко). Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?

3-5(Рябченко). Найдите все пары натуральных x и y, для которых

$$[x-1,y-1]+[x+1,y+1]=2[x,y].$$

5-7(Рябченко). Дан четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$, не являющийся вписанным. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, описанной около треугольника $A_2A_3A_4$. Определим точки O_2, O_3, O_4 и числа r_2, r_3, r_4 аналогичным образом. Докажите, что

$$\frac{1}{O_1A_1^2-r_1^2}+\frac{1}{O_2A_2^2-r_2^2}+\frac{1}{O_3A_3^2-r_3^2}+\frac{1}{O_4A_4^2-r_4^2}=0.$$

6-1(Рябченко). В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

7-7(0 решивших). Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2=3xyz$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

8-4(Рябченко, Неустроева). В городе Угрюмове проживает два миллиона человек, которые мало общались друг с другом. Тем не менее, среди любых двух тысяч человек есть трое попарно знакомых. Докажите, что найдут четверо попарно знакомых человек.

8-5(Иванов, Рябченко, Мустафин). Докажите, что квадрат нельзя разрезать на равные прямоугольные треугольники с углом 30°.

8-7(Рябченко, Писцов, Мустафин). Вписанный многоугольник разрезали диагоналями на треугольники. Докажите, что сумма радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники, одинакова для всех триангуляций.

9-4б (Мельников, Рябченко). Пусть $\sigma(n)$ —- сумма цифр числа n. Докажите, что найдется бесконечно много n таких, что $\sigma(2^{n+1}) < \sigma(2^n)$

9-5(Рябченко). Из клетчатой плоскости вырезали клетки, обе координаты которых делятся на 1000. Докажите, что оставшиеся нельзя обойти конём

9-6(Никто). Верно ли, что из любого числа можно получить квадрат, добавляя к его десятичной записи не более 100500 цифр? Цифры можно вписывать в любые места.

10-4(Никто). Докажите неравенство

$$ax + by + cz + \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)} \geqslant \frac{2}{3}(a+b+c)(x+y+z).$$

10-8(Минаев). Найдите наименьшую такую константу C, для которой существует такая последовательность $\{x_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$1 = x_0 \geqslant x_1 \geqslant x_2 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant \ldots.$$

, что для любого n выполнено

$$\frac{x_0^2}{x_1} + \frac{x_1^2}{x_2} + \ldots + \frac{x_{n-1}^2}{x_n} < C.$$

11-5 (Рябченко). Пусть $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ - целые числа, лежащие на отрезке $[-1000, 1000]$, причём сумма всех этих чисел равна 1. Докажите, что можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была равна 0.

11-6 (Рябченко). Докажите, что существует такое M, что при всех натуральных $n > M$ наименьший простой делитель числа $(n!)^n + 1$ превосходит $n + 1000$.