Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-1.

Неразобранные задачи из серий 1-7.

1-6б(0 решивших). В графе $2n$ вершин и проведено n^2+1 рёбер. Докажите, что в графе есть хотя бы n треугольников.

1-7(0 решивших). На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: "Кем является такой- то: химиком или алхимиком?"(В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за $[1,5k-1,5]$ вопросов.

1-8(0 решивших). Команда, состоящая из $N(N+1)$ футболистов разного роста, выстроена в ряд. Докажите, что тренер всегда сможет удалить из ряда $N(N-1)$ футболистов так, чтобы среди оставшихся $2N$ футболистов были верны следующие утверждения:

(1) Никто не стоит между первым и вторым по росту

(2) Никто не стоит между третьим и четвёртым

....

(N) Никто не стоит между предпоследним и последним по росту.

2-5(Мустафин). Найдите все тройки x, y, z положительных действительных чисел, удовлетворяющих условиям

$$x^2+y^2+z^2=xyz+4;$$

$$xy+yz+zx=2(x+y+z).$$

2-8(Неустроева). Существует ли такое конечное множество M ненулевых действительных чисел, что для любого натурального n найдется многочлен степени не меньше n с коэффициентами из множества M, все корни которого действительны и также принадлежат M?

3-5(0 решивших). Найдите все пары натуральных x и y, для которых

$$[x-1,y-1]+[x+1,y+1]=2[x,y].$$

4-3(5 решивших). Двое играют в игру. Они по очереди проводят диагонали в выпуклом 2016-угольнике. Когда диагональ пересекает k уже проведённых диагоналей, игрок, который её провёл, платит в банк k рублей. Проигрывает тот, кто заплатит в банк больше. Есть ли у одного из игроков выигрышная стратегия?

4-6(3 решивших). На плоскости расположено несколько кругов, площадь объединения которых равна S. Докажите, что из них можно выбрать несколько непересекающихся кругов, суммарная площадь которых не менее $\frac{S}{9}$.

5-5(6+3) (Теорема Паскаля). На окружности Ω расположены различные точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке X, а AF и CD в точке Y. Прямая XY вторично пересекает окружност BEX в точке R.

а) Докажите, что точки R, F, E и Y лежат на одной окружности.

б) Докажите, что прямые RY, EF и BC пересекаются в одной точке.

5-7(Рябченко). Дан четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$, не являющийся вписанным. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, описанной около треугольника $A_2A_3A_4$. Определим точки O_2, O_3, O_4 и числа r_2, r_3, r_4 аналогичным образом. Докажите, что

$$\frac{1}{O_1A_1^2-r_1^2}+\frac{1}{O_2A_2^2-r_2^2}+\frac{1}{O_3A_3^2-r_3^2}+\frac{1}{O_4A_4^2-r_4^2}=0.$$

6-1(Рябченко). В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

7-7(0 решивших). Докажите, что уравнение $x^2+y^2+z^2=3xyz$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.