Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 6. Разнобой-2. Группа 9-1.

1. В одной из вершин n-угольника лежит одна монета, в остальных ничего не лежит. За один ход можно убрать монету из одной из вершин и добавить 6 монет в соседнюю с ней вершину. При каких n можно добиться того, чтобы во всех вершинах было поровну монет?

2. В соревнованиях участвуют 2^n боксёров. Каждый боксёр в течение одного дня может проводить только один бой. Известно, что все боксёры имеют разную силу, и что сильнейший всегда выигрывает. Докажите, что за $\frac{n(n+1)}{2}$ дней можно определить место каждого боксёра. (Расписание каждого дня соревнований составляется вечером накануне и в день соревнований не изменяется.)

3. В шестиугольнике $ABCDEF$ углы A и C прямые, кроме того $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = AF$. Докажите, что $BE \perp DF$.

4. Дисквалифицирована!

5. Имеется 100 гирек попарно различных весов. За одно взвешивание разрешается узнать суммарный вес любых двух. За какое наименьшее количество взвешиваний удастся определить, какая из гирек самая лёгкая?

6. Найдётся ли такой многочлен $f(x)$ с целыми коэффициентами, что $f(20) = 17$, а $f(201) = 7$?

7. Найдите все пары (p, q) простых чисел, удовлетворяющих уравнению $1999 + q^2 = 2^p$

8. Петя нарисовал на бумаге дерево T на n вершинах. Вася нарисовал граф G, степень каждой вершины которого не менее n. Обязательно ли Петя может покрасить некоторые рёбра графа G красным цветом, чтобы получившийся красный граф был изоморфен T?

9. Рассмотрим игру (t, a, b). Изначально на доске написано число t, затем игроки по-очереди делают ходы. За ход можно из числа на доске x сделать либо $x - a$, либо $x - b$. Кто первым получит отрицательное число, тот проиграет. Докажите, что существует бесконечно много таких t, что для любой пары (a, b) с натуральными a и b, для которых $a + b = 2018$, у первого игрока существует выигрышная стратегия в игре (t, a, b).