Серия 6. Степень точки и радикальные оси.

1. а) Даны две неконцетрические окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что ГМТ точек X таких, что степени точки X относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, — это прямая, перпендикулярная линии центров окружностей.
б) Даны три попарно неконцентрические окружности. Докажите, что их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке или параллельны.

2. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все шесть точек лежат на одной окружности.

3. Точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Оказалось, что прямая AB касается описанной окружности треугольника AMC. Докажите, что она также касатеся описанной окружности треугольника BMC.

4. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.

5 (Теорема Паскаля). На окружности Ω расположены различные точки A, B, C, D, E, F. Прямые AB и DE пересекаются в точке X, а AF и CD в точке Y. Прямая XY вторично пересекает окружност BEX в точке R.
а) Докажите, что точки R, F, E и Y лежат на одной окружности.
б) Докажите, что прямые RY, EF и BC пересекаются в одной точке.

6. I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC. Пусть K — точка пересечения перпендикуляра к BI, проведенного в точке I, и прямой AC. Докажите, что основание перпендикуляра, опущенного из I на BK лежит на описанной окружности треугольника ABC.

7. Дан четырёхугольник $A_1A_2A_3A_4$, не являющийся вписанным. Пусть O_1 и r_1 — центр и радиус окружности, описанной около треугольника $A_2A_3A_4$. Определим точки O_2, O_3, O_4 и числа r_2, r_3, r_4 аналогичным образом. Докажите, что

$$\frac{1}{O_1A_1^2 - r_1^2} + \frac{1}{O_2A_2^2 - r_2^2} + \frac{1}{O_3A_3^2 - r_3^2} + \frac{1}{O_4A_4^2 - r_4^2} = 0.$$

Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс. Группа 9-2

Серия 6. Степень точки и радикальные оси.

1. Даны две неконцетрические окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что ГМТ точек X таких, что степени точки X относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, — это прямая, перпендикулярная линии центров окружностей.

2. Даны три попарно неконцентрические окружности. Докажите, что их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке или параллельны.

3. К двух непересекающимся кругам провели 4 общих касательных. Докажите, что все 4 середины отрезков касательных лежат на одной прямой.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все шесть точек лежат на одной окружности.

5. Прямые AB, AC — касательные к окружности ω. Точки M, N — середины отрезков AB и AC. Точка P — произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω.

6. Точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Оказалось, что прямая AB касается описанной окружности треугольника AMC. Докажите, что она также касатеся описанной окружности треугольника BMC.

7. Пусть B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

8. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.