Серия 37. Инверсия.

Инверсией с центром O радиуса R (или инверсией относительно соответствующей окружности) называется преобразование плоскости, переводящее точку X в точку X' на луче OX такую, что $OX \cdot OX' = R^2$

0. a) Прямая, проходящяя через центр инверсии, переходит в прямую

b) Окружность, проходящяя через центр инверсии, переходит в прямую

c) Прямая, не проходящяя через центр инверсии, переходит в окружность

d) Окружность, не проходящяя через центр инверсии, переходит в окружность

Обобщённой окружностью будем называть окружность или прямую.

e) Касающиеся обобщённые окружности переходят в касающиеся обобщённые окружности (касающимися прямыми будем называть параллельные)

1. Углом между окружностями назовём угол между касательными к ним в данной точке. Докажите, что угол между касающимися обобщёнными окружностями сохраняется при инверсии.

2. Окружности ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4 таковы, что ω_2 и ω_4 касаются каждой из окружностей ω_1 и ω_3. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности или прямой .

3. Дана полуокружность ω с диаметром PQ. Окружность α касается ω внутренним образом и отрезка PQ в точке C. Прямая l перпендикулрна PQ и касается α. Пусть она пересекает дугу ω в точке A и отрезок PQ в точке B. Докажите, что AC делит угол PAB пополам.

4. Окружности ω_1 и ω_2 одинакового радиуса пересекаются в точках X_1 и X_2. Окружность ω касается окружности ω_1 внешним образом в точке T_1 и окружности ω_2 внутренним образом в точке T_2. Докажите, что прямые X_1T_1 и X_2T_2 пересекаются на окружности ω.

5. a) Точки P' и Q' — образы точек P и Q при инверсии относительно окружности с центром O радиуса R. Докажите, что $P'Q' = PQ \cdot \frac{R^2}{OP \cdot OQ}$

b) Неравенство Птолемея. Даны произвольные 4 точки A, B, C и D. Докажите, что $AC \cdot BC \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$

6. Дан треугольник ABC. Окружность γ вписана в угол ABC и касается описанной окружности ABC в точке P. Вневписанная в угол B окружность касается стороны AC в точке Q. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

7. Дан треугольник ABC. Обозначим через I центр вписанной окружности. Пусть A_1, B_1 и C_1 — точки касания с соответствующими сторонами. Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AIA_1, BIB_1 и CIC_1 лежат на одной прямой.